

ATATÜRK KÜLTÜR, DİL VE TARİH YÜKSEK KURUMU  
ATATÜRK KÜLTÜR MERKEZİ

# ERDEM

ATATÜRK KÜLTÜR MERKEZİ DERGİSİ

DÖRT AYDA BİR ÇIKAR

Cilt 4

Mayıs 1988

Sayı 11

TÜRK TARİH KURUMU BASIMEVİ, ANKARA  
TEMMUZ 1989

THE FIRST PERFECT NUMBERS AND THREE  
TYPES OF AMICABLE NUMBERS IN A MANUSCRIPT  
ON ELEMENTARY NUMBER THEORY BY IBN  
FALLŪS

SONJA BRENTJES\*

Several recent researches have revealed the intensive attention that was paid by the scientists of the Islamic world since the 9<sup>th</sup> century to elementary number theory.<sup>1</sup> This interest started with the translation of the "Elements" of Euclid at the close of the 8<sup>th</sup> century and during the 9<sup>th</sup> century. In the beginning of the 9<sup>th</sup> century Ḥabīb ibn Bahrīz translated a Syrian paraphrase of the "Introductio Arithmeticae" by Nicomachus of Gerasa, which was commented upon by al-Kindī.<sup>2</sup> Some decades later Thābit Ibn Qurra translated the complete text of the "Introductio Arithmeticae" directly from Greek into Arabic. Already in the 9<sup>th</sup> century the mathematicians added new results to the ancient knowledge. The most important 9<sup>th</sup> century treatise on elementary number theory was composed by Thābit b. Qurra. It treats the construction of amicable, perfect, abundant and deficient numbers in a way, which surpasses the antique heritage. Its terminology resorts several times to the "Introductio Arithmeticae", while its methodology of proofs is based on the arithmetical books

\* Dr., Karl Sudhoff Institut für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften, Karl Marx Universität, Leipzig.

<sup>1</sup> Matvievskaja, G.P., *Učenie o čisle na srednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke*, Taškent, 1967; Matvievskaja, G.P., "Materialy k istorii učenija o čisle nasrednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke," *Iz istorii točnyh nauk na srednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke*, Taškent 1972, pp. 76-169; Muzafarova, Ch. R., "Arifmetika Nikomacha v izložēnii Kutbaddina Širazi," *Mat. i metodika ee prepod.*, cilt 1, Dušanbe, 1974, pp. 124-131; Muzafarova, Ch. R., "Arifmeticeskie i teoretiko-čislovyje aspekty knigi VII "Načal" Evklida v izložēnii Kutbaddina Širazi," *Issledovanija po matematike*, Dušanbe 1977, pp. 79-84; Soussi, M., "Un texte d'Ibn al-Bannī sur les nombres parfaits, abondants, deficients et amiables," International Congress of Mathematical Sciences, July 14, 1975-July, 20, 1975, Hamdard National Foundation, Pakistan 1975; Rashed, R., "Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figures aux XIII ème et XIV ème siecles," *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 28, 1983 pp.107-147.

<sup>2</sup> UB Halle/S., Yb 5. 4<sup>o</sup>, ff 1<sup>b</sup> - 54<sup>a</sup>; See also: Steinschneider, M., *Die Hebraeischen Uebersetzungen des Mittelalters und die Juden als Dolmetscher*, Berlin 1893, vol. II, 320, p. 517.

of the "Elements".<sup>3</sup> Several scientists transmitted its content at least in part until the 17<sup>th</sup> century. As cursory examinations of Central Asian manuscripts show, this interest continued until the 19<sup>th</sup> century.<sup>4</sup> Among those who wrote on elementary number theory are well-known Arabic-Islamic scholars such as al-Bîrûnî,<sup>5</sup> Ibn Sînâ,<sup>6</sup> Abû'l-Wafâ,<sup>7</sup> al-Karajî,<sup>8</sup> Quṭb ad-Dîn ash-Shîrâzî,<sup>9</sup> al-Kâshî,<sup>10</sup> and the author or the authors of the *Rasâ il Ikhwân as-Şafâ*<sup>11</sup> as well as a multitude of other writers such as Abû Mansûr b. Ṭâhir al-Baghdâdî,<sup>12</sup> Kamâl ad-Dîn al-Fârisî,<sup>13</sup> Abû Saqr al-Qabîşî,<sup>14</sup> and others.<sup>15</sup> Some of these writers like Abû Mansûr al-Baghdâdî and Kamâl ad-Dîn al-Fârisî should be evaluated anew by historians of mathematics from the standpoint of their number theoretical works.<sup>16</sup>

<sup>3</sup> Saidan, A.S., *Amicable numbers by Thâbit ibn Qurra*, Amman (publication sponsored by the Jordan University), 1977.

<sup>4</sup> For example in: Bayyân a'ḍād. Rukopis'nyj fond' AN Tadžikskoj SSR, Dušanbe, Ms 1213, f 335\*ff; Majmû'e-ye risâlât. at the same place, Ms 3960; Majmû'a rasâ'il arabîya. At the same place, Ms 4410.

<sup>5</sup> al-Bîrûnî, *Kitâb at-tafhîm li awâ'il sinâ'at at-tanjîm*, ed. J. Humâ'î, Tehran 1319 H, pp. 33-55; See also: Abu Raichan Beruni (913-1048), "Kniga vrazumlenija načatkam nauki o zvesdach," *Izbrannye proizvedenija*, vol. VI, Taškent 1975, pp. 38-50.

<sup>6</sup> Ibn Sînâ, *ash-Shifâ*<sup>2</sup>, *al-fann ath thâni fi'r-riyâdiyât, al-ḥisâb*, ed. 'A.L. Maẓhar, al-Qâhira 1975.

<sup>7</sup> Abû'l-Wafâ' al-Buzĵânî, *Risâla fi'l-aritmâtîqî*, Rukopis'nyj fond' instituta vostokovedenija AN Uzbekskoj SSR, Taškent Ms 4750, ff 255<sup>b</sup>-257<sup>b</sup>; See also: "Traktat Abu-l-Wafâ ob osnovnykh opredelenijach teoričeskoj arifmetiki." In: Matvievskaĵa, G.P., Ch. *Tlašev*, *Matematičeskie rukopisi učenykh Srednej Azii*, X, XVIII vv. Taškent 1981, pp. 63-76.

<sup>8</sup> *L'Algèbre d'al-Badî d'al-Karajî*, Edition, Introduction et Notes par A. Anboubâ, Publications de l'Université Libanaise, Section des Études Mathématiques, Beyrouth 1964.

<sup>9</sup> Quṭb ad-Dîn ash-Shîrâzî, *Durrat at-tâj lig hurrat ad-Dibâj*, ed. Mashkût, S. M., Tehran 1317-1320 H.

<sup>10</sup> Al-Kâshî, *Miftâḥ al-ḥisâb*, ed. an-Nabulsî, N., Dimashg 1977.

<sup>11</sup> *Rasâ'il Ikhwân as-Şafâ*<sup>2</sup>, 1306 H.

<sup>12</sup> Abû Mansûr, Abd'l-Qahir ibn Tahir Al-Baghdâdî, *Al-Takmila fi'l-Hisâb* (The Completion of Arithmetic) *With a tract on Mensuration*, Edited and annotated with comparative by A. S. Saidan, Publications of Institute of Arab Manuscripts, Kuwait 1985.

<sup>13</sup> Kamâl ad-Dîn al-Fârisî, Tadhkirat al-aḥbâb fi bayyân at-taḥâbb, In: Rashed, R., "Matériaux Pour l'Histoire de Nombres Amiables et de l'Analyse Combinatoire", *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 6, 1982, 209-278, pp. 266-229 (in Arabic)

<sup>14</sup> Risâlât al-Qabîşî fi jam' anwâ' min al-a'ḍād. In: Anboubâ, A., "Un mémoire d'al-Qabîşî (4<sup>e</sup> siècle H.) sur certaines sommations numériques," *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 6, 1982, 181-208, pp. 201-187 (in Arabic)

<sup>15</sup> Compare Rashed, R., "Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII<sup>ème</sup> et XIV<sup>ème</sup> siècles", *op. cit.*, p. 109ff.

<sup>16</sup> Compare *ibid.*, pp. 111, 115, 122-147.

With the here summarized manuscript Ibn Fallūs becomes a member of this class.

Shams ad-Dīn Abū-ṭ-Ṭāhir Ismā'il ibn Ibrāhīm ibn Ghāzī ibn 'Alī ibn Muḥammad al-Ḥanafī al-Mārdīnī, called Ibn Fallūs, lived between 1194 and 1252. His epitome on elementary number theory<sup>17</sup> was written during a pilgrimage to Mecca.<sup>18</sup> The author says that the "Introductio Arithmeticae" of Nicomachus was its basic source.<sup>19</sup> He follows Nicomachus in the classification of numbers, the majority of the properties of these numbers, and the philosophical back-ground; but he adds some new classes of numbers. He declines to discuss the theory of numerical ratios and proportions of Nicomachus, but he promises to deal with this subject in a separate work.<sup>20</sup> Whether he actually wrote such a treatise is uncertain.<sup>21</sup> There are no traces of number mysticism in the sense of the "Theologoumenates arithmetikes" in this compendium by Ibn Fallūs.<sup>22</sup> His epitome is a purely mathematical text, interspersed by some philosophical remarks imbedded in an Islamic context.<sup>23</sup> The treatise is devoted to the description of mathematical properties and principles of construction for the 25 kinds of numbers, that Ibn Fallūs defines. The tendency for completeness, however seems to encourage the author to leave the domain of mathematics by introducing some oddities. The "inimical numbers", about which

<sup>17</sup> Shams ad-Dīn Abū-ṭ-Ṭāhir Ismā'il ibn Ibrāhīm ibn Ghāzī ibn 'Alī al-Ḥanafī al-Mārdīnī, *Kitāb i'dād al-isrār fī asrār al-ā'dād*, Staatsbibliothek, Preubischer Kulturbesitz, Berlin, Ms 5970, Lbg. 199, ff 15<sup>a</sup>-31<sup>a</sup>; Dār al-Kutub, Cairo, Ms B 23317, 3, ff 62<sup>a</sup>-72<sup>a</sup>; also: Aya Sofya, Istanbul Ms 2761, 7

<sup>18</sup> *ibid.*, Ms 5970, Lbg. 199, f 15<sup>b</sup>, 3.

<sup>19</sup> *ibid.*, f 15<sup>b</sup>, 11f.

<sup>20</sup> *ibid.*, f 15<sup>b</sup>, 12f.

<sup>21</sup> Aside from the number theoretical treatise there are four further works by Ismā'il ibn Ibrāhīm ibn Fallūs:

- Irshād al-ḥussāb fī'l-maftūḥ min 'ilm al-ḥisāb
- Inṣāb al-khabr fī ḥisāb al-jabr
- Mīzān al-'ulūm fī taḥqīq al-ma'ḥlūm
- aṭ-Ṭafāḥafī a'māl al-misāḥa

See Matvievskaia, G. P., B. A. Rozenfel'd, *Matematiki i astronomy musul'manskogo sred-nevekov'ja i ich trudy (VIII-XVII vv)*, Moskova 1983, vol. 2, No 359, p. 381

<sup>22</sup> See concerning the relevant conjecture by Sezgin: Sezgin, F., *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. 5, Mathematik, Leiden 1974, pp. 165f

<sup>23</sup> Ismā'il ibn Ibrāhīm ibn Fallūs, *op.cit.*, Ms 5970, Lbg. 199, for instance, f 25<sup>a</sup>, 15<sup>f</sup> 25<sup>b</sup>, 9

the author himself states, that there are no mathematical rules for their formation, are an example there of.<sup>24</sup> Nevertheless, even this kind of numbers seems to have been transmitted by other scholars too, since Ḥajjī Khalīfa makes reference to it in his encyclopaedia “Kashf az-Zunūn”:

”علم الخواص ..... ومنها خواص الاعداد المتحابة والمتباغضة كما بين في تذكرة الاحباب  
في بيان التحاب“<sup>25</sup>.

“The science of the special properties. ... Among these are the properties of the amicable and inimical numbers, as explained in ‘Tadhkirat al-ḥabāb fi baiyān at-taḥābb’.”

The book, mentioned by Ḥajjī Khalīfa, could be the work of the same name by Kamāl ad-Dīn al-Fārisī.<sup>26</sup> In Al-Fārisī’s treatise there is not the least trace of the inimical numbers in accordance with its orientation toward mathematical research. No other work, however, with such a title is known to me.

Ibn Fallūs’ text consists of four parts — an introduction on the subject, the principles and the characteristics of the science of numbers, and three chapters about the classes of numbers, their names and rules for construction as well as 25 propositions, mainly from algebra and especially devoted to the solution of quadratic equations. The author calls these propositions geometrical principles and general theorems, which he took according to his introduction from mathematical books, according to his third chapter from geometrical books.<sup>27</sup> A first comparison of those theorems with the author’s algebraical treatise<sup>28</sup> suggests that the algebraical works by al-Karajī and ‘Umar al-Khayyām were the main sources of this third chapter. This part contains different variants for working out  $(a+b)^2$ , the computation of  $(a+b)^3$ , several further propositions, and as an added 26<sup>th</sup> theorem the recursion formula for the binomial coefficients:

$$\binom{n}{k} = \frac{n - (k-1)}{k} \binom{n}{k-1} \text{ in verbal form. }^{29}$$

<sup>24</sup> *ibid.*, f 21<sup>b</sup>, 14 - f 22<sup>a</sup>, 4.

<sup>25</sup> *Keşf-el-Zunun*, Kâtib Çelebi, Maarif Matbaası, İstanbul 1941, vol. 1, col. 725f.

<sup>26</sup> Compare footnote 13.

<sup>27</sup> Ismâil ibn Ibrâhîm ibn Fallūs, *op. cit.*, f 16<sup>b</sup>, 6f.

<sup>28</sup> *ibid.*, f 25<sup>b</sup>, 11.

<sup>29</sup> *ibid.*, f 25<sup>b</sup>, 15 - f 26<sup>a</sup>, 3 and f 28<sup>a</sup>, 12 - f 28<sup>b</sup>, 4.

Aḥmad ibn as-Sirāj, who wrote one of the known three manuscripts, added to the text another problem, connected with the so called theorem of Wilson, which seems to have been formulated first by Ibn al-Haytham. Aḥmad ibn as-Sirāj gave the general solution of this problem in verbal form.<sup>30</sup>

The perfect and amicable numbers are sections 11 and 13 of chapter 2. The amicable numbers are divided into three kinds: amicable numbers according to quantity, amicable numbers according to quality, and amicable numbers according to quantity and quality. The text includes a table, which contains in general ten examples of nearly all kinds of numbers. There are no examples of amicable numbers of the second and third kind, inimical numbers, and three special types of solid numbers, the so-called board, brick, and well numbers.<sup>31</sup> The table gives only the first pair 220, 284 of the normal amicable numbers. In the column for perfect numbers there are ten examples,<sup>32</sup> seven of which are perfect numbers (disregarding scribal errors and minor mistakes in the calculation): 6, 28, 496, 8128,<sup>33</sup> 33 550 336, 8 589 869 056,<sup>34</sup> 137 438 691 328. Thus, Ismâ'il ibn Ibrâhîm ibn Fallûs' treatise contains the earliest recently known statement of the fifth, sixth, and seventh perfect number. At least half a century later (between 1292 and 1306) Qutb ad-Dîn ash-Shîrâzî composed his encyclopaedia, in the mathematical part of which the fifth and sixth perfect numbers are found.<sup>35</sup> Ibn Fallûs' computation of perfect numbers

<sup>30</sup> *ibid.*, f 28<sup>b</sup>, gloss.

<sup>31</sup> See for instance *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae Libri II*, Rec. R. Hoche, Lipsiae, 1913, II, 17, 6.

<sup>32</sup> Ismâ'il ibn Ibrâhîm ibn Fallûs, *op. cit.*, f 29<sup>a</sup>, 17 f.

<sup>33</sup> The manuscript has 68128, obviously because the scribe of the manuscript wrote the last digit of the following number 1 130 816 twice. Aside from 1 130 816, the sixth (4096 128) and the tenth (35 184 367 894 538) number in the list are not perfect.

<sup>34</sup> The manuscript has 8 589 866 056.

<sup>35</sup> Muzafarova, Ch. R., "O matematičeskich glavach enciklopedičeskogo proizvedenija "Durra-at-tadž li gurra-at-dibadž" (Žemčuzina korony dlja ukrašeniya dibadža) Kutbaddina Širazi", *Učenie zapiski trudy mehaniko-matematičeskogo fakul'teta*, vol. 1, Dušanbe 1970, pp. 85-93, p. 92; The paper, however, contains two errors: First, the fifth perfect number is 33 550 336, not 33 550 366. Secondly, this number does not result for  $n = 16$ , but for  $n = 12$ . Since Qutb ad-Dîn ash-Shîrâzî also gives the sixth perfect number, not mentioned by Muzafarova, she evidently confused the two perfect numbers, because the sixth evolves for  $n = 16$ .

corresponds essentially to Euclid's rule IX, 36.<sup>36</sup> The work "At-Takmila fi'l-ḥisâb" of Abû Manṣûr al-Baghdâdî (d 1037) contains an interesting statement about the perfect numbers. Its author refuses the antique assumption, that there is one perfect number in each degree of ten, and declares, that there is no such number between ten thousand and hundred thousand:

”وقد غلط من قال : في كل عقد من العقود عدد واحد تام ، إذ ليس فيما بين عشرة آلاف ومئة ألف : عدد تام.“<sup>37</sup>

“He, who said: in every tenary one number is perfect, is wrong, since there is no perfect number between ten thousand and hundred thousand.”

It seems probably, that the fifth perfect number, at least, was known before Ibn Fallûs. Concerning the amicable numbers Ibn Fallus gives only for the first kind, i.e. the amicable numbers according to quantity, a construction rule. These amicable numbers of the first kind are the usual amicable numbers of other texts, defined by the condition that  $a_1, a_2$  are amicable, if and only if  $G_o(a_1) = a_2, G_o(a_2) = a_1$ , where  $G_o(n)$  indicates the sum of the proper divisors of  $n$ . This definition seems to have been exclusively used by the scholars of the Islamic Middle Ages. That it is equivalent to the assertion:

$a_1, a_2$  amicable numbers, if and only if  $G(a_1) = G(a_2) = a_1 + a_2$ , where  $G(n)$  denotes the sum of all divisors of  $n$ , was discovered ready by Thâbit ibn Qurra and stated at the end of his above mentioned treatise.<sup>38</sup>

<sup>36</sup> Ismâ'il ibn Ibrâhîm ibn Fallûs, *op. cit.*, ff 20<sup>b</sup> - 21<sup>a</sup>.

<sup>37</sup> Abû Mansûr, Abd'l-Qahir ibn Tahir Al-Bâghdâdî, *op.cit.*, p. 227.

<sup>38</sup> ”وانه اذا اخذ كل جزء لكل واحد منهما وجمع ذلك كله مما كانت ذلك مثل  
ذينك العددين مجموعين.“

Saidan, A. S., *op. cit.*, p. 53

If every (divisor) of each of the two (numbers) is taken and all these (divisors) of each (of the numbers) are added, the sum of these (divisors) equals the sum of those two numbers.

See also "Sabit ibn Korra, Matematičeskie traktuty," Sostavitel B. A. Rozenfel'd, *Nauč-noe nasledstvo*, vol. 8, Moskva 1984, p. 126

Ibn Fallūs expressed the rule for amicable numbers of the first kind in the following way:

” واما النوع الثالث عشر وهو الاعداد المتحابه فهى على ثلاثة اقسام متحابه في الكمية بان يكون احد العدد ين زائدا والآخر ناقصا ويكون اجزأ كل واحد منهما مساوية لكمية الآخر مثل ٢٢٠ و ٢٨٤ فان اجزأ كل واحد منهما مساوية لكمية الآخر وتوليدها من الاعداد الشطرنجية بان تجمعها فان حصل اول زد نا عليه اخرها ونقصنا منه ما قبل اخرها فيحصل اولان تضرب احدهما في الاخر ثم المبطغ في اخر الاعداد يخرج اول المتحابين ثم تستخرج الثاني بزيادة احد الاولين على الآخر وتضرب المبلغ في اخر الاعداد فما حصل فهو الفضل عن المتحابين فتزيده على اول المتحابه يخرج العدد الثاني وعلى هذا توليد ها الى غير النهاية“<sup>39</sup>

“The thirteenth class, namely the amicable numbers, consists of three subkinds. (The first kind consists of) the amicable numbers according to quantity, (that is to say), that one of the two numbers is abundant and the other one is deficient. The (sum of the) parts of each of the two (numbers) equals the quantity of the other (number), like 220 and 284, because the (sum of the) parts of each of these equals the quantity of the other. They arise from the chess board numbers (in the following way:) We add them. If a prime number results, we add the last (of the numbers summed up) to (the sum), and we subtract from it the (number), which comes before the last of (the added numbers).

(If) two prime numbers result, we multiply them, and we multiply the result by the last of (added) numbers. Thus the first of the two amicable (numbers) results. Then the second is found by adding the first of the two prime numbers to the other one and by multiplying the result by the last of the (added) numbers. The (product) is the difference between the two amicable numbers. You add this to the first amicable number and the second amicable number is the result. In this way they are constructed (in) unlimited (number).”

The above mentioned chess board numbers are the so called even times even numbers,<sup>40</sup> i.e. the powers of two. The procedure described by Ibn Fallūs is thus the following:

<sup>39</sup> Ismā'īl ibn Ibrāhīm b. Fallūs, *op. cit.*, f 21<sup>a</sup>, 14-21<sup>b</sup>, 8.

<sup>40</sup> *ibid.*, f 18<sup>b</sup>, 7 f.

If  $\sum_{0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$  is prime, form

$$p_1 := \sum_{0}^n 2^k + 2^n$$

and  $p_2 := \sum_{0}^n 2^k - 2^{n-1}$ .

If  $p_1, p_2$  are primes, the first amicable number is  $a_1 := p_1 \cdot p_2 \cdot 2^n$ . The second amicable number arises, when the difference  $(p_1 + p_2)2^n$  between the both amicable numbers is added to  $a_1$ :  $a_2 := (p_1 + p_2)2^n + a_1$ .

This rule corresponds according to R. Rashed<sup>41</sup> to that given by Ibn Sînâ in his encyclopaedia "Kitâb ash-Shifâ", after the edited text of 'A. L. Mazhar has been corrected.<sup>42</sup> Rashed, however, did not explain, what correction he had in mind. In my opinion, the text is clear as is and is not in need of any correction, after the meaning of the dual suffixed personal pronoun humâ in the beginning of the passage has been clarified. Ibn Sînâ surely knew, that  $2^{n+1} - 1$  is not always prime. Thus, the use of the dual (humâ) instead of the plural (hâ) is imperative and means, that Ibn Sînâ referred to the example 220, 284 mentioned in his text just before. In this case is  $n = 2$  and therefore the first two even times even numbers 2 and 4 are to be added to 1. The result happens to be a prime. Thus, R. Rashed's interpretation has to be modified in the sense, that Ibn Sînâ did not state the general condition of  $2^{n+1} - 1, n = 1, 2, \dots$ , being prime, but only the primality of  $p_1$  and  $p_2$ . The further form of Ibn Sînâ's rule agrees not only in the contents, but also in the generality of the wording with the rule of Ibn Fallûs, but Ibn Fallûs does not repeat the restriction to the case  $n = 2$  in the first part of the rule. If in Ibn Sînâ's expression something is to be corrected at all, one should avoid the second dual suffixed personal pronoun, i.e. instead of 'alaihîmâ one should

<sup>41</sup> Rashed, R., "Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII<sup>ème</sup> et XIV<sup>ème</sup> siècles," *op. cit.*, p. 116, footnote 30<sup>a</sup>.

<sup>42</sup> Rashed writes: Si l'on corrige la lecture de l'édition, le texte d'Avicenne devient lumineux, et se traduit ainsi:

si  $(2^{n+1} - 1), p_{n-1}, p_n$  sont premiers, alors  $2^n p_{n-1} p_n$  et  $2^n (p_{n-1} + p_n + p_{n-1} p_n) = 2^n q_n$  sont amiables.

Here his abbreviations mean:

$p_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, p_n = 3 \cdot 2^n - 1, q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ . Compare *ibid.*, pp. 111 and 116, footnote 30<sup>a</sup>.

read <sup>ع</sup>alaihâ or alaihi. This correction, however, affects the meaning of the text only in a minor way.

Ibn Sînâ wrote:

” وإذا جمعت أعداد زوج الزوج والواحد معهما فاجتمع عدد أول بشرط أن يكون إذا زيد عليهما آخرها ونقص الذى قبله كان المبلغ بعد الزيادة والمبلغ بعد النقصان أولين <sup>43</sup> فضرب المبلغ المزيّد عليه في المبلغ المنقوص ثم ضرب ما اجتمع في آخر المجموعات حصل عدد له حبيب ، وحبيبه العدد الذى يكون من زيادة مجموع الزائد والناقص المذكورين ضربا في آخر المجموعات على العدد الموجود أولا الذى له حبيب وهما متحابان. “ <sup>44</sup>

“If two even numbers are added together and to the sum (number) one, a prime number results. If the last (of the added even times even numbers) is added to the two (summands, i.e.,  $6 + 1$ ) (or better: to them, i. e.,  $2 + 4 + 1$ , or: to it, i. e., the prime number 7) and the number before it is subtracted (and) if then the (sum) and the (difference) are two prime numbers, then the product of the (sum), the (difference) and the last of the summed (numbers) gives a number, which has a friend. Its friend is the number, which arises from the addition of the sum of the mentioned sum and difference, multiplied with the last of the summed (numbers), to the previously found number which has a friend. These two are amicable (numbers).”

This reading and interpretation of Ibn Sînâ’s rule lets unexplained how Ibn Fallûs’ general primality condition for  $2^{n+1} - 1$  could have been evolved. A text, which contains an argument for the choice of  $2^{n+1} - 1$  instead of Thâbit ibn Qurra’s  $2^{n+1} (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$  is not known to me. There are some clues, however, out of which this step could be reconstructed hypothetically. First, a check of Ibn Sînâ’s rule for  $n = 3$  already shows, that, although  $p_1$  and  $p_2$  are primes,  $a_1$  and  $a_2$  are not amicable numbers and that, in contrast to  $n = 2$ ,  $2^4 - 1 = 15$  is not prime. Secondly, the continuation to the the case  $n = 4$  yields  $p_1$ ,  $p_2$ , and  $2^5 - 1 = 31$  as prime numbers, and  $a_1$  and  $a_2$  as amicable ones. According to the convincing interpretation of Thâbit ibn Qurra’s treatise on amicable numbers by J. Hogendijk, Thâbit ibn Qurra already knew this pair of

<sup>43</sup> Here, the edition’s *awwaliyan* has been changed to *awwalain*.

<sup>44</sup> Ibn Sînâ, *op. cit.*, p. 28, 15-20.

amicable numbers, because the proof of his general rule is phrased for the case  $n = 4$ .<sup>45</sup> Hence it could have been possible to derive the rule cited by Ibn Fallûs heuristically from the rule of Ibn Sînâ.

Thirdly, the writings of other authors show that Thâbit ibn Qurra's rule was not transmitted verbatim. Nevertheless, the majority of the known texts follow it essentially.<sup>46</sup> The only known scholar, who lived be-

<sup>45</sup> Hogendijk, J. P., "Thâbit ibn Qurra and the Pair of Amicable Numbers 17296, 18416," *Historia Mathematica*, vol. 12, 1985, pp. 269-273.

<sup>46</sup> al-Qabîsî uses the Thâbit-rule in the form given by Thâbit Ibn Qurra: If  $p_1 = 2^{n+1} - 1 + 2^n$ ,  $p_2 = 2^{n+1} - 1 - 2^{n-1}$  and  $p_3 = 2^{n+1} (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$  are prime numbers, then  $2^n p_1 p_2$  and  $2^n p_3$  are amicable numbers, although one sentence is missing in the only extant manuscript. *Risâlat al-Qabîsî fi jam' anwâ' min al-a'dâd*, *op. cit.*, pp. 192-191 (in Arabic);

al-Karajî summarizes Thâbit ibn Qurra's text in a relatively extensive manner in a chapter of his algebraical treatise "al-Badî'c" without reference to his source. He uses in it the following version of Thabit's rule for amicable numbers:

$a_1 = p_1, p_2, 2^n, a_2 = ((2^{n+1})^2 + \frac{1}{8}(2^{n+1})^2 - 1) 2^n, p_1, p_2$  as defined by Thabit ibn Qurra

and prime numbers,  $((2^{n+1})^2 + \frac{1}{8}(2^{n+1})^2 - 1)$  prime number. "L'Algèbre al-Badî'c d'Al-Karajî," *op. cit.*, p. 27

Abû Mansûr al-Baghdâdî introduced in the rule, basically similar to Ibn Sînâ's version, a recursive description of the prime numbers  $p_1$  and  $p_2$ :

— first step:  $2^2 + 1 = 5$  is a prime number,

$5 \cdot 2 + 1 = 11$  is a prime number,

$11 - 2^2$  is a prime number, i. e., he tests, if  $2^{n+1} - 1$  is prime;

then  $11 \cdot 5 \cdot 2^2 = 220$  is the first amicable number and  $(5 + 11) \cdot 2^2 + 220 = 284$  is the second amicable number;

— second step: search for a new pair of amicable numbers  $2 \cdot 11 + 1, 2 \cdot 5 + 1, 2 \cdot 11 + 1 - 2^3, 2 \cdot 5 + 1 - 2^3$ . Test, if these four numbers are primes, if not, this step does not yield a new pair and compute again:

$2p_2 + 1, 2p_1 + 1$  and test, if they are primes. Now the condition,  $2^{n+1} - 1$  and  $2^{n-1} - 1$  prime numbers, is missing.

If in the  $n$ -th step  $2p_2 + 1$  and  $2p_1 + 1$  are prime numbers, then the first amicable number is  $(2p_2 + 1)(2p_1 + 1)2^n$ ;

Abû Mansûr, Abd'l-Qahir ibn Tahir Al-Baghdâdî, *op. cit.*, pp. 230 - 231

Al-Fârîsî describes a version of Thâbit ibn Qurra's rule:

$q_1 = 2^n + 2^{n-1} - 1, q_2 = 3 \cdot 2^n - 1, q_1 q_2 = q_3, q_1 + q_2 + q_3 = q_4$ ; if  $q_1, q_2$  and  $q_4$  are prime,  $2^n q_3$  and  $2^n q_4$  are amicable numbers.

See Rashed, R., "Matériaux Pour l'Histoire des Nombres Amiables et de l'Analyse Combinatoire," *op. cit.*, p. 265; Zain ad-Dîn at-Tanûkhî (1307) states the rule as al-Karajî, the text, however, omits in the rule's general statement the condition for  $p_2$ :  $p_1, p_2$  are defined as by Thâbit ibn Qurra,  $p_3$  as by al-Karajî. If the three numbers are prime, then

fore Ibn Fallūs and stated the rule for amicable numbers in a form, similar to that of Ibn Sînâ, is Abû Mansûr al-Baghdâdî.<sup>47</sup> Fourthly, the version of Thâbit ibn Qurra's text in the Aya Sofya manuscript, which differs from the Paris manuscript, offers a further clue.<sup>48</sup> In the Aya Sofya manuscript it is required that not only

$p_1$ ,  $p_2$  and  $p_3 := 2^{n+1}(2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$ , but also a number  $Z = 2^{n+1} - 1$  is prime.<sup>49</sup> On the basis of the above mentioned interpretation by Hogendijk this inclusion of  $Z$  in the primality condition for  $p_1$  and  $p_2$  also could be explained as a reflection of the concrete case  $n = 4$ , where  $Z = 31$ . Since the primality condition for  $p_1$  and  $p_2$  by Thâbit ibn

$2^n p_1 p_2$  and  $2^n p_3$  are amicable numbers. The absent  $p_2$  can be derived from the following example 220, 284. Compare *ibid.*, p. 228; Muḥammad Baqîr al-Yazdî phrases the rule as follows:  $q_1 = \frac{3}{2} \cdot 2^n - 1 = 2^n + 2^{n-1} - 1$ ,  $q_2 = 3 \cdot 2^n - 1 = 2^n + 2^{n+1} - 1$ ,  $q_3 = q_1 q_2$ ,  $q_4 = q_1 + q_2 + q_3$ .

Note, that al-Yazdî's general statement, as edited by Rashed, contains an error, because he defines  $q_1$  as  $2^n - 1$ . But he gives  $q_1$  as above in the example. His general rule continues: If  $q_1$ ,  $q_2$ , and  $q_4$  are prime numbers, then  $2^n q_3$  and  $2^n (q_1 + q_2 + q_3)$  are amicable numbers. Compare *ibid.*, p. 226;

Ibn Haidur (d 1413) gives the rule in his commentary on the "Talkhîs a'mâl al-ḥisâb" by Ibn al-Bannâ in connection with the example 220, 284:

$p_1$ ,  $p_2$  are defined as by Thâbit b. Qurra, if they are prime, then  $2^n p_1 p_2$  is the first of the sought numbers. If  $p_3 = (2^{n+1} + \frac{1}{4} \cdot 2^n) \cdot 2^{n+1} - 1$  is prime, then  $p_3 2^n$  is the second

one. See *ibid.*, p. 217; In a treatise, attributed by M. Soussi to Ibn al-Bannâ<sup>5</sup>, but probably composed by a commentator according to Rashed, the rule again appears in the original form of Thabit ibn Qurra. The author of the text, however, erroneously requires the primality of the multiplicand  $p_1 p_2$  of  $2^n$  instead of each of the numbers  $p_1$  and  $p_2$ . Then he states the contradiction between his requirement and the examples 220, 284 and 17296, 18416, without recognizing his mistake. See Soussi, M., *op. cit.*, pp. 4-7; Soussi's formulas of Thâbit's rule contain two inaccuracies (p. 13): instead of  $c = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$  read  $c = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ . Thâbit's rule is not simpler than the rule given by this text, but the two rules are equivalent. This fact has already been pointed out by Borho. See Borho, W., "Befreundete Zahlen. Ein zweitausend Jahre altes Thema aus der elementaren Zahlentheorie," *Lebendige Zahlen. Mathematische Miniaturen I*. Basel, 1981, p. 30; Quṭb ad-Dîn ash-Shîrâzî, on the other hand, transmits the rule in the same form as Ibn Fallūs. See Muzafarova, Ch. R., "Arifmetika Nikomacha v izlozenii Kutbaddina Širazi," *op. cit.*, p. 129

<sup>47</sup> See the description of al-Baghdâdî's rule in footnote 46.

<sup>48</sup> Ms 4830, Aya Sofya, Istanbul, ff 110<sup>a</sup> - 121<sup>b</sup>; See Saidan, A. S., *op. cit.*, pp. 50 - 53.

<sup>49</sup> *ibid.*, p. 50.

Qurra points to the general case,<sup>50</sup> the inclusion of  $Z$  tends to become a general condition too. Later authors, who transmitted Ibn Sînâ's rule, could have taken over this general primality condition for  $2^{n+1} - 1$ ,  $p_1$ , and  $p_2$  on the basis of the version of Thâbit ibn Qurra's treatise in the Aya Sofya manuscript, while the condition for  $p_3$  was omitted, because  $p_3$  was no longer computed explicitly. They may also have introduced themselves the general primality condition for  $2^{n+1} - 1$  by considerations as outlined above.

No Arabic-Islamic scholar seems to have investigated the relations between the both rules. A comparison between the pairs of amicable numbers, produced by the two rules, shows, that both yield the pairs for  $n = 2$  and  $n = 4$ , but only Thâbit ibn Qurra's rule gives the pair for  $n = 7$  too. According to Borho<sup>51</sup> this rule does not produce any other pair for  $n \geq 20.000$ . With the notation  $q = 2^{n+1} - 1$  and  $p_3$  as above as  $2^{n+1} (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$  the relation between the two rules can be stated as:

$$p_3 = \frac{9}{8} (q + 1)^2 = \frac{1}{8} (9q^2 + 18q + 1).$$

”فان كان كل واحد من اعداد ز ، ح ، ط (١٠) عددا اوليا غير الاثنين.<sup>50</sup> فهو الذى نريد ، والا تجاوزنا الاعداد التي جمعت الي غيرها حتى ننتهي الى ما تكون هذه الاعداد منه اوابيل (١١).“

” (١٠) في النسخة ٢ : من عدد دى ح ، ط .“

” (١١) في النسخة ٢ : هذان العددان من عدد ين اولين .“

*ibid.*, pp. 50 and 54

For the English version of this passage I use the translation of Hogendijk, J., “Thâbit ibn Qurra and the Pair of Amicable Numbers 17296, 18416, *op. cit.*, p. 270. I replaced, however, Hogendijk's interpolation (\*) through the original letter  $Z$  of the Arabic text, omitted Hogendijk's explanation [...] and added the numbers of Saidan's footnotes (10) and (11): “If each of the numbers  $Z$ ,  $H$ ,  $T$ <sup>(10)</sup> is a prime number other than the number two, then this is what we want. If not, then we proceed with the (series of) numbers that we added until we arrive at some number such that these numbers which are derived from it are prime.<sup>(11) sic</sup>”

“(10) in manuscript 2: ... the two numbers  $H$ ,  $T$  (11) in manuscript 2: ... these two numbers are prime.”

The manuscript 2 is the Paris manuscript Ms 2457, Bibliothèque Nationale, ff 170<sup>b</sup> - 180<sup>b</sup>; Compare Sâbit ibn Korra, *op. cit.*, p. 124.

<sup>51</sup> Borho, W., *op. cit.*, p. 14.

Evidently, the assertions “q prime” and “p<sub>3</sub> prime” are independent, as is demonstrated by the following examples: n = 6 q = 127 prime, p<sub>3</sub> = 18.431 = 7.2633 n = 8 q = 511 = 7.73, p<sub>3</sub> = 294.911 prime.

No quadratic polynom f is known which yields for infinitely many argument values x prime numbers f(x).<sup>52</sup> The analysis, which numbers a<sub>1</sub> = 2<sup>n</sup>p<sub>1</sub>p<sub>2</sub> and a<sub>2</sub> = 2<sup>n</sup>p<sub>3</sub> with p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>, and p<sub>3</sub> primes are amicable numbers, gives the following results:

- if a<sub>1</sub> and a<sub>2</sub> are amicable numbers, G (a<sub>1</sub>) = G (a<sub>2</sub>) is valid for primes p<sub>3</sub> with p<sub>3</sub> = (p<sub>1</sub> + 1) (p<sub>2</sub> + 1) - 1 and arbitrary primes p<sub>1</sub> and p<sub>2</sub>;
- if a<sub>1</sub> and a<sub>2</sub> are amicable numbers, G (a<sub>1</sub>) = G (a<sub>2</sub>) holds true, be 2<sup>n+1</sup> - 1 a prime number or not, i.e. the primality condition for 2<sup>n+1</sup> - 1 is insignificant;
- the structure of the primes p<sub>1</sub> and p<sub>2</sub> of two amicable numbers a<sub>1</sub> and a<sub>2</sub> depends upon the equation 2<sup>n</sup>p<sub>1</sub>p<sub>2</sub> + 2<sup>n</sup>p<sub>3</sub> = G (2<sup>n</sup>p<sub>3</sub>), which has to be valid for two amicable numbers a<sub>1</sub> and a<sub>2</sub>.

Using the above given relation between p<sub>3</sub> and p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub> the equation 2<sup>n</sup>p<sub>1</sub>p<sub>2</sub> + 2<sup>n</sup>p<sub>3</sub> = G (2<sup>n</sup>p<sub>3</sub>) yields

$$\frac{(p_1 + 1) (p_2 + 1)}{p_1 + p_2 + 2} = 2^n.$$

If a<sub>1</sub> = 2<sup>n</sup>p<sub>1</sub>p<sub>2</sub> and a<sub>2</sub> = 2<sup>n</sup>p<sub>3</sub> are amicable numbers, the least of the three primes is greater than 2. Thus, we can put p<sub>1</sub> + 1 = 2k<sub>1</sub>, p<sub>2</sub> + 1 = 2k<sub>2</sub>, where k<sub>1</sub> < k<sub>2</sub>.

We get

$$\frac{4k_1k_2}{2 (k_1 + k_2)} = 2^n.$$

With k<sub>1</sub> = 2<sup>n-1-k</sup>(2<sup>k</sup> + 1)

and k<sub>2</sub> = 2<sup>n-1</sup> (2<sup>k</sup> + 1) and 0 < k < n

one obtains the following structure of the three primes:

<sup>52</sup> I am indebted to Dr. O. Neumann, Jena, for this information.

$$p_1 = 2^{n-k} (2^k + 1) - 1$$

$$p_2 = 2^n (2^k + 1) - 1$$

$$p_3 = (p_1 + 1) (p_2 + 1) - 1 = 2^{2n-k} (2^k + 1)^2 - 1.$$

This result is equivalent to Euler's rule for all amicable numbers of the above given type, i.e.,  $a_1 = 2^n p_1 p_2$  and  $a_2 = 2^n p_3$ . For  $k = 1$  one gets an equivalent version of Thābit b. Qurra's rule.

Ibn Fallūs describes the second kind of amicable numbers as follows:

” المتحابة في الكيفية بان يكون احد العدد ين زوجا ويكون اجزائه فردا ويكون الاخر فردا ويكون اجزائه زوجا.“<sup>53</sup>

“(Numbers) are amicable according to quality, if one of the two numbers is even and its parts are odd, and if the other (number) is odd and its parts are even.”

This statement is meaningful, provided that the two words “its parts” are interpreted as “sum of its parts”, i.e., sum of the proper divisors of the number. This interpretation is justified by the wording of the definitions for abundant, deficient and amicable numbers according to quantity in the second chapter of Ibn Fallūs'treatise. There the author uses the expression “parts” in the sense of “sum of the parts”, in contrast to the definitions of the first chapter.<sup>54</sup> Hence two numbers are called amicable according to quality, if

$$a_1 = 2k_1 \text{ and } G_o(a_1) = 2m_1 + 1,$$

$$a_2 = 2k_2 + 1 \text{ and } G_o(a_2) = 2m_2,$$

$$k_i, m_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2.$$

Examples are not given in the text. It is, however, easy to show, that only the following numbers are amicable according to quality:

$$a_1 : 2^n, (2k_1)^2, 2^n(2k_1)^2, 2^n(2k_1 + 1)^2$$

<sup>53</sup> Ismā'īl ibn Ibrāhīm ibn Fallūs, *op. cit.*, f 21<sup>b</sup>, 9f.

<sup>54</sup> *ibid.*, f 17<sup>b</sup>, 1-5.

$$a_2 : (2k_2 + 1)^2,$$

$$n, k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

$(2k_1)^2$  and  $2^n (2k_1)^2$  are nothing but special cases of  $2^n$  or  $2^n (2k_1 + 1)^2$ .

$a_1 = 2^n$  obviously satisfies the conditions.  $a_1 = 2^n (2k_1 + 1)^2$  and

$a_2 = (2k_2 + 1)^2$  satisfy them, if and only if  $G [(2k_1 + 1)^2]$  and

$G [(2k_2 + 1)^2]$  are odd. Let  $2k_1 + 1 = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_t^{n_t}$  be the prime number decomposition with  $p_i \neq p_j \neq 2, \forall i, j \in \{1, \dots, t\}$ .

$G [(2k_1 + 1)^2] = \prod_{i=1}^t \left( \sum_{l=0}^{2n_i} p_i^l \right)$  is odd, if and only if every factor is odd.

This is evident, because every factor is the sum of an odd number of odd terms. It follows, that all other even or odd numbers are not amicable according to quality.

The third kind, the amicable numbers according to quantity and quality, is defined by Ibn Fallûs as those numbers, which possess the properties of the both preceding kinds.<sup>55</sup> This definition means:

Two numbers  $a_1, a_2$  are called amicable according to quantity and quality, if  $a_1$  is even,  $G_o(a_1)$  is odd,  $a_2$  is odd and  $G_o(a_2)$  is even with  $G_o(a_1) = a_2$  and  $G_o(a_2) = a_1$ . Thus, one asks implicitly for pairs  $a_1, a_2$  of opposite parity with

$$1. a_1 = 2^n, a_2 = (2k_2 + 1)^2$$

or

$$2. a_1 = 2^n(2k_1 + 1)^2, a_2 = (2k_2 + 1)^2$$

$$\text{and } G_o(a_1) = a_2, G_o(a_2) = a_1.$$

The first case is simple to exclude, since Kanold has proven, that two numbers  $s = p^n, t = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \dots \cdot q_r^{m_r}, p \neq q_i \neq q_j$  can only be amicable, if  $s, t, n$  and some  $m_i$  are odd<sup>56</sup>. From his proof it follows in-

<sup>55</sup> *ibid.*, f 21<sup>b</sup>, 10-12.

<sup>56</sup> Kanold, H.-J., "Über befreundete Zahlen. I," *Mathematische Nachrichten*, vol. 9, 1953, pp. 243-248.

cidentally, that  $2k_2 + 1$  in the second case can not be a power of a prime number. Hence, a pair of numbers with opposite parity can be amicable (this formulation is equivalent to Ibn Fallûs' amicable according to quantity and quality) only, if  $a_1 = 2^n(2k_1 + 1)^2$ ,  $a_2 = (2k_2 + 1)^2$  and  $2k_2 + 1$  is not a power of prime number.<sup>57</sup> Such a pair is unknown until present,<sup>58</sup> but necessary conditions and lower bounds have been derived:

Let  $a_1 = 2^n(2k_1 + 1)^2$  and  $a_2 = (2k_2 + 1)^2$  be amicable numbers. Then the following is valid:

1.  $a_1$  is neither a fourth power nor a quadruple or octuple of such a power.

2.  $2k_1 + 1$  is not a square.

3. If  $n = 1$ , we have  $a_2 < a_1$ ,  $(a_1, a_2) = 1$ ;  $a_2$  possesses at least five distinct prime factors,  $a_1 a_2 \equiv 2 \pmod{24}$ ,  $a_2 > 10^{60}$ .

4. If  $n > 1$ , then  $a_1 < a_2$ ,  $(a_1, a_2) > 1$ .

5. If  $n > 1$  odd, then  $(2k_1 + 1, 3) = (2k_2 + 1, 3)$ , and there is a prime number  $q$  and  $m \in \mathbb{N}$  with  $q^m \mid 2k_2 + 1$  and  $q^{m+1} \nmid 2k_2 + 1$  and  $q \equiv m \equiv 1 \pmod{3}$ . If  $m \equiv 3 \pmod{4}$ , there exists a prime number  $p$ , not necessarily distinct of  $q$ , and  $l \in \mathbb{N}$  with  $p^l \mid 2k_2 + 1$  and  $p^{l+1} \nmid 2k_2 + 1$  and  $2p \equiv 1 \equiv 2 \pmod{5}$  and

<sup>57</sup> After the completion of the manuscript I was able to consult the treatises Kanold, H.-J., *op. cit.*, and Gioia, A. A., A. M. Vaidya, "Amicable Numbers with Opposite Parity," *American Mathematical Monthly* 74, vol. 8, 1967, p.p 969-973, cited by Lee, E. J., J. S. Madachy, "The History and Discovery of Amicable Numbers"- Part I, *Journal of Recreational Mathematics* 5, vol. 2, 1972, pp. 77-93. The survey of Lee and Madachy served as the basis for the considerations in the present paper about the structure of amicable numbers with different parity. The treatise of Gioia and Vaidya also proves, that amicable pairs of different parity can only have the structure  $2^n(2k_1 + 1)^2$ ,  $(2k_2 + 1)^2$ ,  $2k_2 + 1$  being a composed number. Some further propositions on the structure of  $2k_1 + 1$  are also derived. The proof is independent of Kanold's paper, which gives a sharper result concerning the structure of  $2k_2 + 1$ . Note that Gioia's and Vaidya's paper operates with an incorrect statement of the definition of amicable numbers. They require, that the sum of all positive divisors of one number is equal to the other number (p. 69).

<sup>58</sup> According to Lee, E. J., J. S. Madachy, *op. cit.* p. 84, the formula  $a_1 = 2^n M^2$ ,  $a_2 = N^2$ ,  $M, N$  odd numbers, was first given by Gmelin, O., *Über vollkommene und befreundete Zahlen*, Diss., Hiedelberg, 1917, Halle/S., 1917, but as a matter of fact its earliest occurrence is in: Kanold, H.-J., "Über befreundete Zahlen. II," *Mathematische Nachrichten*, vol. 10, 1953, pp. 99 - 111, p. 99.

$$2k_1 + 1 \equiv 2k_2 + 1 \equiv \frac{1}{4} (n + 1) G[(2k_1 + 1)^2] \equiv 0 \pmod{5}.$$

6. If  $2k_1 + 1 = p^s$ , then  $n = 1$ ,  $s > 6$ ,  $p \equiv 1 \pmod{12}$ , the number of distinct prime factors of  $a_2$  is greater than 24 and  $a_2 > 10^{75}$ .<sup>59</sup>

These results obtained by 20<sup>th</sup> century mathematicians show that the problem of finding amicable numbers of the third kind could not be solved by medieval mathematicians. Thus this problem probably did not originate in a mathematical context. Since no other text is known to contain this problem, an ultimate answer about its origin or its motivation cannot be given at this time. Ismail ibn Ibrâhîm ibn Fallûs' way of expression, however, points at its possible origin in a philosophical background.

<sup>59</sup> *ibid.*, pp. 99 - 111; Lee, E. J., J. S. Madachy, *op. cit.*, p. 84.

#### Acknowledgements

I am grateful to Prof. D. King (Frankfurt a. M.) for making the manuscript Dâr al-Kutub, Cairo, Ms B 23317, 3 available to me, and to Dr. J. Hogendijk (Utrecht) for the help concerning the English translation of my paper.

Dr. Sonja Brentjes

Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften,

Bereich Medizin, Karl-Marx-Universität

Talstr. 33, Leipzig, DDR-7010.



# IBN FALLÛS'UN ELEMANTER SAYI TEORİSİ ÜZERİNE OLAN BİR YAZMASINDAKİ İLK YEDİ MÜKEMMEL SAYI VE DOST SAYILARIN ÜÇ ÇEŞİTİ

SONJA BRENTJES

Türkçeye çeviren: MELEK DOSAY\*

Son zamanlarda yapılan bazı araştırmalar 9. yüzyıldan itibaren elemanter sayı teorisine İslâm Dünyası bilim adamlarının yoğun bir ilgi gösterdiklerini ortaya koymaktadır.<sup>1</sup> Bu ilgi 8. yüzyıl sonları ile 9. yüzyıl boyunca Euclid'in "Elementler" inin tercümesi ile başladı. 9. yüzyıl başlarında Habîb ibn Bahrîz, Kindî tarafından şerhi yapılan Nicomachus of Gerasa'nın *Introductio Arithmeticae*'sinin bir Süryani nüshasını tercüme etti.<sup>2</sup> Yirmi, otuz yıl sonra Şâbit ibn Kurra *Introductio Arithmeticae*'nin tam metnini doğrudan doğruya Yunanca'dan Arapça'ya tercüme etti. 9. yüzyılda matematikçiler eski bilgilere zaten yeni neticeler eklemişlerdi. Elemanter sayı teorisi konusunda 9. yüzyılın en önemli incelemesi Şâbit ibn Kurra tarafından yapılmıştı. Bu eser dost sayıların, mükemmel sayıların, fazlalıklı (abundant)\*\* ve eksikli (deficient)\*\*\* sayıların yapısını bu konulara ilişkin

\* Yard. Doç. Dr., Ankara Üniversitesi, Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi, Felsefe Bölümü, Bilim Tarihi Ana bilim dalı.

\*\* Fazlalıklı sayı: Tam bölenlerinin toplamı kendisinden büyük olan sayı.

\*\*\* Eksikli sayı: Tam bölenlerinin toplamı kendisinden küçük olan sayı. Aykut Göker "abundant" sayıyı "aşırı sayı", "deficient" sayıyı "özürlü sayı" olarak tercüme ediyor. *Orta Çağda Fizik Bilimleri*, Edward Grant, çeviren: Aykut Göker, 1986, s. 13.

<sup>1</sup> Matvievskaya, G.P., *Uçenie o çisle na srednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke*, Taşkent 1967; Matvievskaya, G.P., "Materialy kistorii uçeniya o çisle na srednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke", *Izistorii tocných nauk na srednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke, Taşkent* 1972, s. 76-169; Muzafarova, Ch. R., "Arifmetika Nikomacha v izloženii Kutbaddina Şirazi", *Mat. i metodika ee prepod.*, c. 1, Düşenbe 1974, s. 124-131; Muzafarova, Ch. R., "Arifmetičeskie i teoretiko-çislovyje aspekty knigi VII "Nacal" Evklida v izloženii Kutbaddina Şirazi", *Issledovaniya po matematike*, Düşenbe 1977, s. 79-84; Soussi, M., "Un texte d'Ibn al-Bannî sur les nombres parfaits, abondants, deficients et amiables", *International Congress of Mathematical Sciences*, Temmuz 14, 1975-Temmuz 20 1975, Hamdard National Foundation, Pakistan 1975; Rashed, R., "Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII ème et XIV ème siecles", *Archive for History of Exact Sciences*, cilt 28, 1983, s. 107-147.

<sup>2</sup> UB Halle S., Yb 5. 4°, 1<sup>b</sup>-54<sup>a</sup> yapraklar; ayrıca şuna da bakınız: Steinschneider, M., *Die Hebraeischen Uebersetzungen des Mittelalters und die Juden als Dolmetscher*, Berlin 1893, cilt 2, 320, s. 517.

Antik çağın mirasından üstün bir biçimde ele almaktadır.\*\*\*\* İspat metodu *Elementler*'in aritmetik kitaplarına dayanmakta, metodolojisi ise zaman zaman *Introductio Arithmeticae*'ye baş vurmaktadır.<sup>3</sup> Bazı bilim adamları bu incelemenin muhtevasını hiç değilse 17. yüzyıla kadar taşıdılar. Orta Asya yazmalarından kısa incelemelerin gösterdiği gibi, bu ilgi 19. yüzyıla kadar devam etti.<sup>4</sup> Elemanter sayı teorisi konusunda yazan İslam Dünyası araştırmacılarından en iyi bilinenler arasında Beyrûnî,<sup>5</sup> İbn Sînâ,<sup>6</sup> Abû'l Vefâ,<sup>7</sup> Kerecî,<sup>8</sup> Kutbiddin Şîrazî,<sup>9</sup> Kâşî<sup>10</sup> ve Resâil İhvân es-Sefâ'nın<sup>11</sup> yazar veya yazarları, ve de Abû Mansûr ibn Tâhir el-Bağdâdî,<sup>12</sup> Kemaleddin Fârisî,<sup>13</sup> Abû Saqr al-Kabîsî<sup>14</sup> gibi başka yazarlar<sup>15</sup> da vardı. Bunların bazıları, me-

\*\*\*\* Daffâ ve Stroyls da şu makalelerinde aynı konuyu incelemekteler: *İbn Sînâ Doğu-munun Bininci Yılı Armağanı*, "İbn Sînâ as a mathematician", Ali A. Al-Daffa-John Stroyls, Ankara 1984, s. 79.

<sup>3</sup> Saidan, A.S., *Amicable Numbers by Thâbit ibn Qurra*. Amman (Ürdün Üniversitesi Yayını) 1977.

<sup>4</sup> Örneğin *Beyân a'dâd*'de. Rukopis'nyj fond' AN Tacikskoy SSR, Düşenbe 1213, 335<sup>a</sup> yaprak; *Mecmû'e-ye risâlât*. Aynı yerde yazma No. 3960, *Mecmû'a resâ'il 'Arabîya*. Aynı yerde yazma No. 4410.

<sup>5</sup> Al-Bîrûnî, *Kûtâb at-Tefhîm li'avvâ'il sinâ at at-Tancîm*, ed. J. Humâ'î, Tahran 1319 H., s. 33-55; Şuna da bakınız: Abû Reyhan Beyrûnî (913-1048), "Kniga vrazumlenija naçat-kam nauki o zvesdach", *Izbrannye proizvedenija* VI. Taşkent 1975, s. 38-50.

<sup>6</sup> İbn Sînâ, *Eş-Şifâ El fen el-sânî riyâziyât, el-hisâb*, ed. 'A.L. Mazhar, Kahire 1975.

<sup>7</sup> Abû'l-Vefâ el-Buzcânî, *Risâle fi'l-aritmetikî*, Rukopis'nyj fond' instituta vostokovedenija AN Uzbekskoj SSR, Taşkent, Ms 4750, 255<sup>b</sup>-257<sup>b</sup> yapraklar, şuna da bakınız: "Traktat Abu'l-Wafy ob osnovch opredelenijach tedretičeskoj arifmetiki: Matievskaya, G.P., Ch. Tllasev, *Matematičeskie rukopisi uçenyh Srednej Azii X. XVIII vv.* Taşkent 1981, s. 63-76.

<sup>8</sup> A. Anbouba, *L'Algèbre al-Badî 'd'Al-Karajî*, edisyon, sunuş ve notlar, Lübnan Üniversitesi yayınlarından, Matematik incelemeleri Bölümü, Beyrut 1964.

<sup>9</sup> Qutb ad-Dîn ash-Shîrâzî, *Durrat at-tâj lighurrah ad-Dibâj*, ed. Mashkût, S. M., Tahran 1317-1320 H.

<sup>10</sup> Al-Kâşî, *Miftâh al-hisab*, ed. an-Nabulsî, N., Şam 1977.

<sup>11</sup> *Resâil ihvân es-Safâ*, 1306 H.

<sup>12</sup> Abû Mansur, Abd'l-Qahir ibn Tahir Al-Bağdâdî, *Al-Takmila fi'l Hisâb* (Aritmetiğin Tamamı), mesaha üzerine bir kısım ile, mukayeseli edisyonu ve şerhi A.S. Saidan tarafından yapılmıştır, Arap Yazmaları Enstitüsü Yayınlarından, Kuveyt 1985.

<sup>13</sup> Kamâl ad-Dîn al-Fârisî, *Tezkire el-ahbâb fi beyân el-tahâbb*, R. Rashed, "Matériaux Pour l'Histoire de Nombres Amiables et de l'Analyse Combinatoire", *Journal for the History of Arabic Science*, cilt 6, 1982, s. 209-278, 266-229 Arapça.

<sup>14</sup> *Risâle el-Kabîsî fi cem' envâ min el-â'dâd*, A. Anbouba, "Un Mémoire d'al-Qabîsî (4e siècle H.) sur certaines sommations numériques", *Journal for the History of Arabic Science*, cilt 6, 1982, s. 181-208, 201-187 Arapça.

<sup>15</sup> R. Rashed, "Nombres amiables, parties aliquettes et nombres figurés aux XIII<sup>ème</sup> et XIV<sup>ème</sup> siècles", *a. g. e.*, s. 109 dipnot ile mukayese ediniz.

selâ Abû Mansûr el-Bağdâdî ve Kemâleddin Fârisî matematik tarihçileri tarafından yeni baştan sayı teorisi çalışmaları açısından değerlendirilmelidir.<sup>16</sup> Burada yazması özetlenen İbn Fallûs bu grubun bir üyesi olmaktadır.

Ibn Fallûs adıyla anılan Şemseddin Abû Tâhir ibn İbrâhîm ibn Gâzî ibn ʿAli ibn Muhammed el-Hanefî el-Mârdînî 1194 ve 1252 yılları arasında yaşamıştır. Elemanter sayı teorisi<sup>17</sup> üzerine özet çalışması Mekke'ye bir yolculuğu sırasında yazılmıştır.<sup>18</sup> Yazar, Nicomachus'un *Introductio Arithmaticae*'sinin, kendisinin temel kaynağı olduğunu söylemektedir. Nicomachus'un sayıları sınıflamasında bu sayıların özelliklerinden büyük bölümünü ve felsefi temelini kabul etmekte, fakat bazı yeni sayı sınıfları ilâve etmektedir. Nicomachus'un sayısal oran ve orantılar teorisini tartışmaya girmiyor, fakat bu konuyu ayrı bir eserde ele alacağına söz vermektedir.<sup>20</sup> Gerçekte böyle bir eser yazıp yazmadığı belli değildir.<sup>21</sup> İbn Fallûs'un bu özetinde "Theologoumenates aritmetikes" anlamında sayı mistisizmine dair belirti yoktur.<sup>22</sup> Onun özeti İslâmi bir bağlam içinde bazı felsefi mülâhazalarla karışık saf bir matematik metnidir.<sup>23</sup> Bu inceleme, İbn Fallûs'un tanımladığı yirmibeş çeşit sayının tertib edilmesi (oluşturulması) prensiplerinin ve matematiksel özelliklerinin tavsifine hasr edilmiştir. Mamafî bütünlük eğilimi yazarı bazı acayip problemleri ekleyerek mate-

<sup>16</sup> a.g.e., s. 111, 115, 122-147 ile mukayese ediniz.

<sup>17</sup> Şemseddin Abû Tâhir İsmâ'îl ibn İbrahim ibn Gâzî ibn ʿAli el-Hanefî el-Mârdînî, *Kitâb ʿîdâd el-ısrâr fi asrâr al-ʿîdâd*, Staatsbibliothek, PreuBischer Kulturbesitz, Berlin, yazma No. 5970, Lbg. 199, 15<sup>a</sup>-31<sup>a</sup> yapraklar; Dâr al-Kutub, Kahire, Yazma No B 23317, 3, 62<sup>a</sup>-72<sup>a</sup> yapraklar; yine Ayasofya, İstanbul, Yazma No 2761, 7,

<sup>18</sup> a.g.e., yazma No. 5970, Lbg. 199, 15<sup>b</sup> yaprak, 3.

<sup>19</sup> a.g.e., 15<sup>b</sup> yaprak, satır 11.

<sup>20</sup> a.g.e., 15<sup>b</sup> yaprak, satır 12.

<sup>21</sup> Sayı teorisi incelemesi dışında İsmâ'îl ibn İbrâhîm ibn Fallûs'un dört eseri daha vardır:

- Irşâd el-Hussâb fi'l -meftûh min ʿilm el-ħisâb
- İnşâb el-habr fi ħesâb el-cebr
- Mîzân el-ʿulüm fi tahkîk el-maʿlûm
- El-ıfâħa fi aʿmâl el-mesâħa.

Bakınız, Matvievskaia, G.P., Rosenfeld, B.A., *Matematiki i astronomy musul'manskogosed-nevekov'ja i ıch trudy (VIII-XVII vv)*, Moskova, 1983, cilt 2, No 359, s. 381.

<sup>22</sup> Sezgin'in bu konuyla ilgili varsayımına bakınız: Sezgin, F., *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, cilt 5, Matematik, Leiden 1974, s. 165 dipnot.

<sup>23</sup> İsmâ'îl ibn İbrahim ibn Fallûs, a.g.e., yazma No. 5970, Lbg. 199, örneğin 25<sup>a</sup> yaprak, 15-22<sup>a</sup> yaprak, 9.

matik sahasını terk etmeye teşvik etmiş görünmektedir. Yazarın kendisinin, formüllendirilmeleri için matematiksel kuralların bulunmadığını ifade ettiği “düşman sayılar” bunun bir örneğidir.<sup>24</sup> Yine bile, bu çeşit sayılar diğer araştırmacılar tarafından da nakledilmiş gibi görünmektedir, çünkü Hacı Halife *Keşf el-Zunûn*’unda buna referans yapmaktadır:

”علم الخواص ..... ومنها خواص الاعداد المتحابة والمتباغضة كما بين في تذكرة الاحباب في بيان التحاب.“<sup>25</sup>

“Özel hususiyetler bilimi... Bunlar arasında *Tezkire el-Ahbâb fi-beyân et-Tahâb*’da açıklandığı gibi dost ve düşman sayıların özellikleri vardır.”

Hacı Halife tarafından söz konusu edilen kitap Kemâleddin Fârisî’nin aynı isimli eseri olabilir.<sup>26</sup> Fârisî’nin kitabında matematiksel araştırma yönünde düşman sayılara dair en küçük bir iz yoktur. Mamafî böyle bir başlığa sahip başka hiç bir eseri ben bilmiyorum.

İbn Fallûs’un metni dört kısımdan oluşur; konuyu takdim, sayılar biliminin prensipleri ve özellikleri ve sayıların sınıfları, bunların adları ve esas olarak cebir sahasında ve özellikle de ikinci derece denklemlerin çözümlerine hasır edilen 25 proposisyonun kurulması için kurallar hakkında üç bölüm. Yazar bu proposisyonlara geometrik prensipler ve genel teoremler demektedir ki, bunları giriş bölümünde matematik kitaplarına göre, üçüncü bölümde ise geometri kitaplarına göre almaktadır.<sup>27</sup> Bu teoremlerin yazarın cebir eseri<sup>28</sup> ile mukayesesi ilkin Kerecî ve Ömer Hây-yam’ın cebir eserlerinin bu üçüncü bölüm için ana kaynaklar olduğunu akla getirmektedir. Bu bölüm  $(a + b)^2$  yi çözmek için farklı değişkenleri,  $(a + b)^3$  ün hesaplanmasını, başka birkaç proposisyon ve yirmialtıncı teo-

reme bir ek olarak binom katsayıları için  $\binom{n}{k} = \frac{n - (k-1)}{k} (k^{n-1})$  formülünün sözel biçimini ihtiva etmektedir.<sup>29</sup>

Bilinen üç yazmadan birini yazan Ahmed ibn el-Şirâzî ilk defa İbn el-Heyssem tarafından formüle edilmiş gibi görünen ve Wilson teoremi de-

<sup>24</sup> a.g.e., 21<sup>a</sup> yaprak, 14-22<sup>a</sup> yaprak, 4.

<sup>25</sup> Kâtib Çelebi, *Keşf el-Zunun*, Maarif Matbaası, cilt 1, İstanbul 1941, kolon 725

<sup>26</sup> Dipnot 13 ile karşılaştırınız.

<sup>27</sup> İsmâ’îl ibn İbrahim ibn Fallûs, a.g.e., 16<sup>b</sup> yaprak, 6 satır.

<sup>28</sup> a.g.e., 25<sup>b</sup> yaprak, 11.

<sup>29</sup> a.g.e., 25<sup>b</sup> yaprak, 15-26<sup>b</sup> yaprak, 3 ve 28<sup>a</sup> yaprak, 12-28<sup>b</sup> yaprak, 4.

nilen teorem ile ilişkili bir başka problemi metne eklemiştir. Ahmed ibn, el-Şirâzi bu problemin sözel biçimde genel çözümünü vermiştir.<sup>30</sup>

İkinci bölümün 11. ve 13. kısımları mükemmel ve tam sayılardır. Dost sayılar üç çeşite ayrılmıştır: Niceliğe göre dost sayılar, niteliğe göre dost sayılar ve niceliğe ve niteliğe göre dost sayılar. Metinde, aşağı yukarı bütün çeşitlerden on genel örnek ihtiva eden bir çizelge bulunmaktadır. İkinci ve üçüncü çeşit dost sayıların, düşman sayıların ve tahta (board)\*, tuğla (brick)\*\* ve kuyu (well)\*\*\* sayılar denen üç boyutlu sayıların üç özel tipi için örnek yoktur.<sup>31</sup> Çizelge normal dost sayılardan sadece ilk 220, 284 çiftini vermektedir. Mükemmel sayılar kolonunda on örnek bulunmakta,<sup>32</sup> bunların yedisi mükemmel sayılar (yazarın hataları ve önemsiz hesap yanlışlarına bakmayarak): 6, 28, 496, 8128,<sup>33</sup> 33 550 336, 8 589 869 056,<sup>34</sup> 137 438 691 328. Böylece İsmâil ibn İbrâhîm İbn Fallûs'un eseri son zamanlarda bilinen, 5., 6. ve 7. mükemmel sayıların en erken ifadesini ihtiva etmektedir. Hiç değilse yarım yüzyıl sonra (1292 ve 1306 arası) Kuṭbeddîn Şîrâzî matematik bölümünde, 5. ve 6. mükemmel sayıların bulunduğu ansiklopedisini ortaya koymuştur.<sup>35</sup> İbn Fallûs'un mükemmel sayılar hesabı esas olarak Euclid'in IX. kitabının 36. teoremindeki kurala tekabül etmektedir.<sup>36</sup> Abû Mansûr Bağdâdî (1037)'nin *El-Tekmilê fi'l-*

\* Board number:  $a.b.c.$ ,  $a \neq b \neq c$ .

\*\* Brick number:  $a^2 . b$ ,  $a < b$ .

\*\*\* Well number:  $a^2 . b$ ,  $a > b$ .

<sup>30</sup> *a.g.e.*, 28<sup>b</sup> yaprak, haşiye.

<sup>31</sup> Örneğin bakınız: *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae Libri II*, Rec. R. Hoche, Lipsiae 1913, II, 17,6.

<sup>32</sup> İsmâ'il ibn İbrahim ibn Fallûs, *a.g.e.*, 29<sup>a</sup> yaprak, satır 17.

<sup>33</sup> Yazmada 68128 dir, bunun aşikâr nedeni 1 130 816 yı izleyen sayının son rakamının iki defa yazılmış olmasıdır. 1 130 816 dan başka listede bulunan altıncı (4 096 128) ve onuncu (35 184 367 894 538) sayıları mükemmel değildir.

<sup>34</sup> Yazmada 8 589 866 056 dır.

<sup>35</sup> Muzafarova, Ch. R., "O Matematičeskich Glavach Enciklopedičeskogo Proizvedeni-ja "Durra at-tadž li gurra-at-dibadž" (Žemčužina korony dlja ukrašenija dibadža) Kutbaddi-na Şirazi.

*Učenie Zapiski Trudy Mechaniko-Matematičeskogo fakul'teta*, cilt 1, Düşenbe 1970, s. 85-93, 92; mamafî makale iki hata ihtiva etmektedir: İlki, beşinci mükemmel sayı 33 550 366 değil 33 550 336 dır. İkincisi, bu sayı  $n = 16$  için sonuç vermez,  $n = 12$  için verir. Kutbeddîn el-Şirâzi Muzafarova tarafından söz edilmeyen altıncı mükemmel sayıyı da verdiğinden, o açıkça iki mükemmel sayıyı karıştırmıştır, çünkü altıncı mükemmel sayı  $n = 16$  için sonuç vermektedir.

<sup>36</sup> İsmâ'îl ibn İbrâhîm ibn Fallûs, *a.g.e.*, 20<sup>b</sup>-21<sup>a</sup> yapraklar.

*ḥesâb* adlı kitabı mükemmel sayılar hakkında ilginç bir ifade ihtiva etmektedir. Bağdâdî on'un her kuvvetinde bir mükemmel sayı vardır şeklindeki eski çağa ait kabulü reddetmekte ve onbin ile yüzbin arasında bu tür bir sayı olmadığını bildirmektedir:

”وقد غلط من قال : في كل عقد من العقود عدد واحد تام ، إذ ليس فيما بين عشرة آلاف ومئة ألف : عدد تام.“<sup>37</sup>

“O şöyle dedi: On'un her kuvvetinde bir sayının mükemmel olması yanlıştır, çünkü onbin ile yüzbin arasında mükemmel sayı yoktur.”

Muhtemelen hiç değilse 5. mükemmel sayı İbn Fallûs'dan önce biliniyordu. Dost sayılara ilişkin olarak İbn Fallûs sadece ilk çeşit, yani niceliğe göre dost sayıların oluşturulması kuralını vermektedir. Bu ilk çeşit dost sayılar, diğer metinlerde geçen, yalnız ve yalnızca  $G_0(a_1) = a_2$ ,  $G_0(a_2) = a_1$  ise  $a_1$  ve  $a_2$  nin dost sayılar olması koşuluyla belirlenmiş alışılmış dost sayılardır, burada  $G_0(n)$  n'nin tam bölenlerinin toplamını göstermektedir. Bu tanım yalnızca Ortaçağ İslâm Dünyası araştırmacıları tarafından kullanılmış gibi görünmektedir. Bu şu ifadeye denktir:

Eğer ve yalnızca eğer  $G(a_1) = G(a_2) = a_1 + a_2$  ise  $a_1$ ,  $a_2$  dost sayılardır, burada  $G(n)$  n'nin bütün bölenlerinin toplamını göstermektedir. Bu Şabit ibn Qurra tarafından keşfedilmiş ve yukarda sözü edilen eserinin sonunda ifade edilmiştir.<sup>38</sup> İbn Fallûs birinci çeşit dost sayılar için kuralı aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

”واما النوع الثالث عشر وهو الاعداد المتحابة فهى على ثلاثة اقسام متحابة في الكمية بان يكون احد العدد ين زائدا والاخر ناقصا ويكون اجزأ كل واحد منهما مساوية لكمية الاخر مثل ٢٢٠ و ٢٨٤ فان اجزأ كل واحد منهما مساوية لكمية الاخر وتوليدها من الاعداد

<sup>37</sup> Abû Mansûr, Abd'l-Kahir İbn Tahir al-Bağdâdî, *a.g.e.*, s. 227.

<sup>38</sup> ”وانه اذا اخذ كل جزء لكل واحد منهما وجمع ذلك كله مما كانت ذلك مثل  
ذينك العددين مجموعين.“

Saidan, A.S., *a.g.e.*, s. 53.

İki (sayıdan) her birinin her (böleni) alınır ve (sayıların) her birinin bütün bu (bölenleri) toplanır, bunların toplamı bu iki sayının toplamına eşittir.

Şuna da bakınız: B.A. Rosenfeld, “Sâbit ibn Korra, Matematičeskie traktaty”, *Naučnoe Nasledstvo*, cilt 8, Moskova 1984, s. 126.

الشرطية بان تجمعها فان حصل اول زد نا عليه اخرها ونقصنا منه ما قبل اخرها فيحصل اولان تضرب احدهما في الاخر ثم المبلغ في اخر الاعداد يخرج اول المتحابين ثم تستخرج الثاني بزيادة احد الاولين على الاخر وتضرب المبلغ في اخر الاعداد فما حصل فهو الفضل عن المتحابين فتزيده على اول المتحابية يخرج العدد الثاني وعلى هذا توليد ها الى غير النهاية.“<sup>39</sup>

“Onüçüncü sınıf yani dost sayılar, üç alt sınıftan ibarettir. (Birinci çeşit) niceliğe göre dost sayılar (yani) iki sayının biri fazlalıklı ve diğeri eksiklidir. Bu iki (sayının) her birinin bölenleri (toplamı) diğeri (sayı) niceliğe eşittir, 220 ve 284 gibi, çünkü bunların her birinin bölenleri (toplamı) diğeri niceliğine eşittir. Bunlar satranç tahtası sayılarından (aşağıdaki biçimde) ortaya çıkmaktadır: Biz bunları toplarız. Eğer bir asal sayı çıkarsa, (toplanan sayıların) sonuncuyu (toplama) ekleriz ve aynı sayıdan (toplanan sayıların) sonuncusundan bir önce gelen (sayıyı) çıkarırız. (Eğer) iki asal sayı çıkarsa, bunları çarpırız ve sonucu (toplanan) sayıların sonuncusu ile çarpırız. Böylece iki dost (sayıdan) ilki elde edilmiş olur. Bundan sonra iki asal sayının ilki diğeri eklenerek ve sonuç (eklenen) sayıların sonuncusu ile çarpılarak ikinci dost sayı bulunur. (Çarpım) iki dost sayı arasındaki farktır. Bunu ilk dost sayıya eklersiniz ve ikinci dost sayı elde edilir. Bu şekilde sonsuz sayıda dost sayı oluşturulur.”

Yukarda sözü edilen satranç tahtası sayıları çift sayıda çift sayı olarak da adlandırılır,<sup>40</sup> yani ikinin kuvvetleri. İbn Fallûs’un tavsif ettiği süreç şöyledir:

Eğer  $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$  asal ise,  $P_1 = \sum_{k=0}^n 2^k + 2^n$  ve  $P_2 = \sum_{k=0}^n 2^k - 2^{n-1}$  dir.

Eğer  $P_1$  ve  $P_2$  asal ise ilk dost sayı  $a_1 = P_1 \cdot P_2 \cdot 2^n$  dir. İkinci dost sayı, her iki dost sayı arasındaki  $(p_1 + p_2) \cdot 2^n$  farkı  $a_1 : a_2 = (P_1 + P_2) \cdot 2^n + a_1$ ’e eklendiğinde elde edilir.

Bu kural R. Rashed’e göre,<sup>41</sup> ‘A.L. Mazhar’ın neşrettiği metni düzeltildikten sonra İbn Sînâ’nın *Kitâb el-Şifâ*’sında verdiği kurala tekabül et-

<sup>39</sup> İsmâ‘îl ibn İbrâhîm ibn Fallûs, *a.g.e.*, 21<sup>a</sup> yaprak, 14-21<sup>a</sup> yaprak, 8.

<sup>40</sup> *a.g.e.*, 18<sup>b</sup> yaprak, 7. satır.

<sup>41</sup> R. Rashed, “Nombres Amiables, Parties Aliquotes et Nombres figurés aux XIII<sup>ème</sup> et XIV<sup>ème</sup> siècle”, *a.g.e.*, s. 116, dipnot 30<sup>a</sup>.

mektedir.<sup>42</sup> Mamafi, Rashed kafasındaki tashihi açıklamamıştır. Bence, pasajın başlangıcındaki son ek humâ ikil şahıs zamirinin anlamı açıklık kazandıktan sonra metin herhangi bir aşikâr tashihe muhtaç değildir. Hiç şüphesiz İbn Sînâ  $2^{n+1} - 1$  in daima asal olmadığını biliyordu. Böylece, çoğul (hâ) yerine ikil (humâ)'nın kullanılması zorunludur ve bu, İbn Sînâ'nın az önceki metninde söz edilen 220, 284 örneğine işaret etmesi demektir. Bu durumda  $n = 2$  dir ve bu nedenle ilk iki çift sayı 2 ve 4,1'e eklenmiştir. Sonuç bir asal sayıdır. Böylece, R. Rashed'in yorumu İbn Sînâ'nın  $2^{n+1} - 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , asal olma genel koşulunu ifade etmediği, fakat sadece  $P_1$  ve  $P_2$  nin asallığını ifade ettiği anlamında tadil edilmek zorundadır. İbn Sînâ'nın kuralının buna ek biçimi sadece muhtevada değil, ifadesinin genel geçerliği bakımından da İbn Fallûs'un kuralı ile uyusmaktadır, fakat İbn Fallûs kuralın ilk kısmında  $n = 2$  koşuluna kısıtlamayı tekrarlamamaktadır. Eğer İbn Sînâ'nın ifadesinde tashih edilecek bir şey varsa, ikinci şahıs ikil zamirinden kaçınılmalıdır, yani 'alaihîma yerine 'alaihâ veya 'alaihi okunmalıdır. Mamafi, bu tashih metnin anlamını çok önemsiz bir biçimde etkilemektedir. İbn Sînâ şöyle yazmıştır:

”وإذا جمعت أعداد زوج الزوج والواحد معهما فاجتمع عدد أول بشرط أن يكون إذا زيد عليهما آخرها ونقص الذي قبله كان المبلغ بعد الزيادة والمبلغ بعد النقصان أولين<sup>43</sup> ف ضرب المبلغ المزيد عليه في المبلغ المنقوص ثم ضرب ما اجتمع في آخر المجموعات حصل عدد له حبيب ، وحببيه العدد الذي يكون من زيادة مجموع الزائد والناقص المذكورين ضربا في آخر المجموعات علي العدد الموجود أولا الذي له حبيب وهما متحابان.“<sup>44</sup>

“Eğer çift sayıların çift katları toplanırsa ve bunların ikisine bir (sayısı) eklenirse bir asal sayı çıkar. Eğer (toplanan çift sayıların çift katlarının) sonuncusu toplama, yani  $6 + 1$ 'e eklenirse (yani  $2 + 4 + 1$  ya da  $7$  asal sayısına) ve sondan bir önceki sayı çıkartılırsa (ve) eğer (toplam) ve (fark) iki asal sayı ise (toplamın), (farkın) ve (toplanmış) sayıların sonuncusunun

<sup>42</sup> Rashed şöyle yazmakta: Bu edisyonun okunması düzeltilirse İbn Sînâ'nın metni daha aydınlatıcı olur ve şöyle çevrilir:

Eğer  $(2^{n+1} - 1)$ ,  $P_{n-1}$ ,  $P_n$  asal ise,  $2^n P_{n-1} P_n$  ve  $2^n (P_{n-1} + P_n + P_{n-1} P_n) = 2^n q_n$  dost sayılardır.

Burada onun kısaltmaları şu anlama gelmektedir:

$$P_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, P_n = 3 \cdot 2^n - 1, q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1.$$

a.g.e., s. 111 ve 116, dipnot 30<sup>a</sup> ile karşılaştırınız.

<sup>43</sup> Burada avvalîyan şekli avvalain biçimine değişmiştir.

<sup>44</sup> Ibn Sînâ, a.g.e., s. 28, 15-20.

çarpımı bir dost sayı verir. Bunun dostu olan sayı, toplanan (sayıların) sonuncusu ile çarpılmış olan söz konusu edilen toplam ve farkın toplamının önce bulunan dost sayıya eklenmesiyle bulunur. Bu ikisi dost (sayılar)dır.”

İbn Sînâ'nın kuralının bu okunmuş ve yorumlanmış şekli İbn Fallûs'un  $2^{n+1} - 1$  genel asallık koşulunu nasıl geliştirebilmiş olduğunu izahsız bırakmaktadır. Şâbit ibn Qurra'nın  $2^{n+1} (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$  kuralının yerine  $2^{n+1} - 1$ 'in seçilmesi için bir argümen ihtiva eden bir metin ben bilmiyorum. Mamafî bu adımı hipotetik olarak yeniden kurabilecek bazı ipuçları vardır. İlki, İbn Sînâ'nın  $n = 3$  için kuralının kontrolü,  $P_1$  ve  $P_2$  asal sayılar olmasına rağmen  $a_1$  ve  $a_2$ 'nin dost sayılar olmadığını ve  $n = 2$  durumundakinin tersine,  $2^4 - 1 = 15$  in asal olmadığını göstermektedir. İkinci olarak,  $n = 4$  durumuna devam etme  $P_1, P_2$  ve  $2^5 - 1 = 31$ 'nin asal sayı ve  $a_1$  ve  $a_2$ 'yi dost sayılar olarak verir. J. Hogendijk'in Şâbit ibn Qurra'nın dost sayılar üzerine olan eserinin inandırıcı yorumuna göre, Şâbit ibn Qurra bu dost sayı çiftini zaten biliyordu, çünkü onun genel kural için ispatı  $n = 4$  durumu için ifade edilmişti.<sup>45</sup> Buradan, İbn Fallûs'un İbn Sînâ'nın kuralını alışılmadık bir biçimiyle aldığı sonucunu çıkarmak mümkün olabilir. Üçüncüsü, diğer yazarların eserleri Şâbit ibn Qurra'nın kuralının aynıyla nakledildiğini göstermektedir. Yine de, bilinen metinlerin büyük çoğunluğu temel olarak İbn Sînâ'yı izlemektedir.<sup>46</sup> İbn Fal-

<sup>45</sup> Hogendijk, J.P., “Thâbit ibn Qurra and the Pair of Amicable Numbers 17296, 18416”, *Historia Mathematica*, cilt 12, 1985, s. 269-273.

<sup>46</sup> Al-Kabîşî Şâbit ibn Qurra tarafından verilen biçimde Şâbit kuralını kullanmaktadır: Eğer  $P_1 = 2^{n+1} - 1 + 2^n$ ,  $P_2 = 2^{n+1} - 1 - 2^{n-1}$  ve  $P_3 = 2^{n+1} (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$  asal sayılar ise,  $2^n P_1 P_2$  ve  $2^n P_3$  dost sayılardır, bir cümle mevcut tek yazmada kayıp olmasına rağmen “Risâle el-Kâbişî fi cem' envâ' min el-a'c'dâd”, *a.g.e.*, s. 192-191 (Arapça)

Kereci cebir eseri *el-Badî'*in bir bölümünde kaynağına atf yapmaksızın nispeten geniş bir biçimde Şâbit ibn Qurra'nın metnini özetlemektedir. Dost sayılar için Şâbit ibn Qurra'nın kuralının şu uyarlamasını kullanmaktadır:

$a_1 = P_1 P_2 2^n$ ,  $a_2 = [(2^{n+1})^2 + 1/8 (2^{n+1})^2 - 1] 2^n$ ,  $P_1, P_2$  Şâbit ibn Qurra tarafından tanımlandığı şekilde asal sayılardır, ve  $[(2^{n+1})^2 + 1/8 (2^{n+1})^2 - 1]$  asal sayıdır. “L'Algèbre al-Badî' d'Al-Karagî”, *a.g.e.*, s. 27.

Abû Mansûr el-Bağdâdî temel olarak İbn Sînâ'nın uyarlamasına benzer,  $P_1$  ve  $P_2$  asal sayıların ardıl tavsifi olan kuralı sunmuştur:

— İlk adım :  $2^2 + 1 = 5$  bir asal sayıdır,

$5 \cdot 2 + 1 = 11$  bir asal sayıdır,

$11 - 2^2$  bir asal sayıdır, yani  $2^{n+1} - 1$  in asal olup olmadığını kontrol etmektedir;

$11 \cdot 5 \cdot 2^2 = 220$  ilk dost sayı ve  $(5 + 11) \cdot 2^2 + 220 = 284$  de ikinci dost

sayıdır;

lûs'dan önce yaşamış ve dost sayılar kuralını İbn Sînâ'ninkine benzer biçimde ifade etmiş bilinen tek araştırmacı Abû Mansûr el-Bağdâdî'dir.<sup>47</sup>

— İkinci adım: Yeni bir çift dost sayı araştırma  $2 \cdot 11 + 1$ ,  $2 \cdot 5 + 1$ ,  $2 \cdot 11 + 1 - 2^3$ ,  $2 \cdot 5 + 1 - 2^3$ .

Bu dört sayının asal olup olmadıklarını dener, eğer değilse, bu adım yeni bir çift dost sayı vermez ve yeniden hesaplar:

$2P_2 + 1$ ,  $2P_1 + 1$  ve bunların asal olup olmadıklarını dener.

$2^{n+1} - 1$  ve  $2^{n-1} - 1$  asal sayılar koşulu kayıp. Eğer n-inci adımda  $2P_2 + 1$  ve  $2P_1 + 1$  asal sayılar ise ilk dost sayı  $(2P_2 + 1)(2P_1 + 1) \cdot 2^n$  dir.

Abû Mansûr Abd'l-Kahir İbn Tahir el -Bağdâdî, *a.g.e.*, s. 230-231.

Al-Fârîsî, Şâbit İbn Qurra'nın kuralının bir uyarlamasını tavsif etmektedir:

$q_1 = 2^n + 2^{n-1} - 1$ ,  $q_2 = 3 \cdot 2^n - 1$ ,  $q_1 q_2 = q_3$ ,  $q_1 + q_2 + q_3 = q_4$ ; eğer  $q_1$ ,  $q_2$  ve  $q_4$  asal ise  $2^n q_3$  ve  $2^n q_4$  dost sayılardır.

Bakınız: R. Rashed, "Matériaux Pour l'Historie des Nombres Amiables et de l'Analyse Combinatoire", *a.g.e.*, s. 265; Zeyneddin el-Tanûhî (1307) Kereci gibi aynı kuralı ifade etmektedir, mamafî metin, Şâbit ibn Qurra tarafından tanımlanan  $p_2$ :  $p_1$ ,  $p_2$  için, ve Kereci tarafından tanımlanan  $p_3$  için koşulun genel ifadesini atlamaktadır. Eğer bu üç sayı asal ise,  $2^n P_1 P_2$  ve  $2^n P_3$  dost sayılardır.  $P_2$ 'nin bulunmuyuşu 220,284 örneğini izleyerek çıkarılabilir. *a.g.e.*, s. 228 ile karşılaştırınız.

Muhammed Bekir al-Yezdî aşağıdaki kuralı ifade etmektedir:

$q_1 = (3/2) \cdot 2^n - 1 = 2^n + 2^{n-1} - 1$ ,  $q_2 = 3 \cdot 2^n - 1 = 2^n + 2^{n+1} - 1$ ,  $q_3 = q_1 q_2$ ,  $q_4 = q_1 + q_2 + q_3$ , Rashed tarafından telif edildiği gibi Al-Yezdî'nin genel ifadesinin bir hata içerdiğine dikkat ediniz, çünkü o,  $q_1$ 'i  $2^n - 1$  olarak tanımlamaktadır. Fakat  $q_1$ 'i yukarıdaki örnekteki gibi vermekte. Onun genel kuralı şöyle devam etmektedir:

Eğer  $q_1$ ,  $q_2$  ve  $q_4$  asal sayılar ise,  $2^n q_3$  ve  $2^n(q_1 + q_2 + q_3)$  dost sayılardır. *a.g.e.*, s. 226 ile mukayese ediniz.

Ibn Haydar (ölm. 1413) Ibn al-Bannâ'nın "Telhis a'âmâl el-ḥesâb" adlı eseri üzerine yaptığı şerhde 220,284 örneğine ilişkin kuralı vermektedir:

$P_1$ ,  $P_2$  Şâbit ibn Qurra tarafından yapıldığı gibi tanımlanmıştır, eğer bunlar asal ise, o halde  $2^n P_1 P_2$  aranan sayıların ilkidir. Eğer  $P_3 = (2^{n+1} + 1/4 \cdot 2^n) \cdot 2^{n+1} - 1$  asal ise, o halde  $P_3 2^n$  ikinci aranan sayıdır. Bakınız; *a.g.e.*, s. 217.

M. Soussi'nin Ibn al-Bannâ'ya atfettiği, fakat Rashed'e göre muhtemelen bir şerhçi tarafından yazılmış bir eserde bu kural Şâbit ibn Qurra'nın orijinal biçiminde tekrar ortaya çıkmaktadır. Mamafî metnin yazarı yanlış olarak  $P_1$  ve  $P_2$  sayılarının her biri yerine  $2^n$  nin  $P_1 P_2$  çarpanının asallığını istemektedir. Bu isteği ve 220,284 ve 17296, 18416 örnekleri arasındaki çelişkiyi kendi hatasını farketmeksizin ifade etmektedir. Bakınız; M. Soussi, *a.g.e.*, s. 4-7. Soussi'nin Şâbit ibn Qurra kuralı formülleri iki yanlışlık ihtiva etmektedir (s.13):

$c = 9 \cdot 2^{n-1} - 1$  yerine  $c = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$  olarak okur. Şâbit'in kuralı bu metinde verilen kuraldan daha basit değildir, fakat bu iki kural eşdeğerdir. Bu gerçeğe zaten Borho tarafından dikkat çekilmişti. Bakınız; W. Borho, "Befreundete Zahlen. Ein Zweitausend Jahre Altes Thema aus der Elementaren Zahlentheorie", *Lebendige Zahlen. Mathematische Miniaturen*, cilt I, Basel 1981, s. 30.

Öte yandan Kutbeddin Şirazi bu kuralı İbn Fallûs gibi aynı biçimde nakleder. Bakınız; Ch. R. Muzafarova, "Arifmatika Nikomacha v Izlozenii Kutbaddina Şirazi", *a.g.e.*, s. 129.

<sup>47</sup> Dipnot 46 daki Al-Bağdâdî'nin kuralının tavsifine bakınız.

Dördüncü olarak, Şâbit ibn Qurra'nın eserinin Paris nüshasından farklı olan Ayasofya nüshası başka bir ipucu vermektedir.<sup>48</sup> Aya Sofya yazmasında sadece  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3: = 2^{n+1} (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$ 'in değil, bir  $Z = 2^{n+1} - 1$  sayısının da asal olması istenmektedir.<sup>49</sup> Hogendijk'in yukarıda söz konusu edilen yorumuna dayanarak  $P_1$  ve  $P_2$  için asallık koşulunda bu şekilde  $Z$ 'nin işe karışması  $Z = 31$  iken  $n = 4$  belirli durumunun bir yansıması olarak da açıklanabilir. Şabit ibn Qurra'nın  $P_1$  ve  $P_2$  için asallık koşulu genel duruma işaret ettiğinden,<sup>50</sup>  $Z$ 'nin kabulü de genel bir koşul olma görünümündedir. İbn Sinâ'nın kuralını nakleden daha sonraki yazarlar Şâbit ibn Qurra'nın eserinin Ayasofya nüshasına dayanarak  $2^{n+1} - 1$ ,  $P_1$  ve  $P_2$  için bu genel asallık koşulunu alabilirlerdi, halbuki  $P_3$  için koşul atlanmıştı, çünkü  $P_3$  artık kesin olarak hesaplanmıyordu. Bunlar yukarıda ana hatları verilen düşüncelerle  $2^{n+1} - 1$  için genel asallık koşulunu kendiliğinden insanın aklına getirmiş olabilir.

Hiç bir İslâm araştırmacısı her iki kural arasındaki ilişkileri araştırmış görünmemektedir. Bu iki kuralın ortaya koyduğu dost sayı çiftleri arasında yapılan bir mukayese her iki kuralın da  $n = 2$  ve  $n = 4$  için sonuç verdiğini, fakat sadece Şâbit ibn Qurra'nın kuralının  $n = 7$  için de dost

<sup>48</sup> Yazma 4830, Ayasofya, İstanbul, 110<sup>a</sup>-121<sup>b</sup> yapraklar; bakınız; A.S. Saidan, *a.g.e.*, s. 50-53.

<sup>49</sup> *a.g.e.*, s. 50.

<sup>50</sup> "فان كان كل واحد من اعداد ز ، ح ، ط (١٠) عددا اولاً غير الاثنین فهو الذى نريد ، والا تجاوزنا الاعداد التي جمعت الي غيرها حتى تنتهى الى ما تكون هذه الاعداد منه او ایل (١١) .

" (١٠) في النسخة ٢ : من عدد د ی ح ، ط .

" (١١) في النسخة ٢ : هذان العددان من عدد ين اولین و "

*a.g.e.*, s. 50 ve 54.

Bu pasajın İngilizce uyarlaması için Hogendijk'in tercümesini kullandım. J. Hogendijk, "Thâbit ibn Qurra and the Pair of Amicable Numbers 17296, 18416", *a.g.e.*, s. 270. Mamafî Hogendijk'in Arapça metnin orijinal  $Z$  harfini yorumunu (x) işareti ile değiştirdim ve Hogendijk'in açıklamasını (...) atladım ve Saidan'ın dipnot 10 ve 11 deki sayılarını ekledim:

"Eğer  $Z, H, T$  sayılarının her biri iki sayısı dışında bir asal sayı ise, bu durum bizim istediğimizdir. Eğer değilse, kendisinden türetilen sayıların asal olduğu belirli bir sayıya ulaşıncaya kadar sayı dizilerini açarız (111)".

"(10) yazma 2'de: ... H.T sayıları

(11) yazma 2'de: ... bu iki sayı asaldırlar".

Yazma 2 Paris yazmasıdır, yazma 2457, Bibliotheque Nationale, 170<sup>b</sup>-180<sup>b</sup> yapraklar; Şâbit ibn Qurra, *a.g.e.*, s. 124 ile karşılaştırınız.

sayı çifti verdiğini göstermektedir. Borho'ya göre,<sup>51</sup> bu kural  $n \geq 20.000$  için başka bir çift (dost sayı) vermez.  $q = 2^{n+1} - 1$  ve yukarda  $2^{n+1} (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$  olarak verilen  $P_3$  ile iki kural arasındaki ilişki şöyle ifade edilebilir:

$$P_3 = 9/8 \cdot (q + 1)^2 = 1/8 \cdot (9q^2 + 18q + 1).$$

Kaçınılmaz olarak "q asaldır" ve " $P_3$  asaldır" iddiaları aşağıdaki örneklerle gösterildiği gibi bağımsızdır:  $n = 6$   $q = 127$  asal,  $P_3 = 18.431 = 7.2633$

$$n = 8 \quad q = 511 = 7.73, P_3 = 294.911 \text{ asal.}$$

Sonsuz x değerleri için f(x) asal sayılarını veren hiç bir f ikinci derece polinomu bilinmemektedir.<sup>52</sup>  $a_1 = 2^n P_1 P_2$  ve  $a_2 = 2^n P_3$  sayılarının  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  asal iken dost sayılar olması aşağıdaki sonuçları vermektedir:

— Eğer  $a_1$  ve  $a_2$  dost sayılar ise,  $G(a_1) = G(a_2)$  olması  $P_3 = (P_1 + 1)(P_2 + 1) - 1$  asal ve  $P_1$  ve  $P_2$  keyfi asal sayılar iken geçerlidir;

— Eğer  $a_1$  ve  $a_2$  dost sayılar ise ister  $2^{n+1} - 1$  bir asal sayı olsun ister olmasın  $G(a_1) = G(a_2)$  doğrudur, yani  $2^{n+1} - 1$  için asallık koşulu dikkate alınmamıştır;

—  $a_1$  ve  $a_2$  dost sayılarının  $P_1$  ve  $P_2$  asallarının yapısı,  $a_1$  ve  $a_2$  dost sayıları için geçerli olmak zorunda olan  $2^n P_1 P_2 + 2^n P_3 = G(2^n P_3)$  denkleminde dayanmaktadır.

$P_3$  ve  $P_1$ ,  $P_2$  arasındaki yukarda verilen ilişkiyi kullanarak  $2^n P_1 P_2 + 2^n P_3 = G(2^n P_3)$  denklemi  $(P_1 + 1)(P_2 + 1)/P_1 + P_2 + 2 = 2^n$  sonucunu verir.

Eğer  $a_1 = 2^n P_1 P_2$  ve  $a_2 = 2^n P_3$  dost sayılar ise üç asal sayının en küçüğü 2'den büyüktür. Böylece  $P_1 + 1 = 2k_1$ ,  $P_2 + 1 = 2k_2$ ,  $k_1 < k_2$  yazabiliriz.

$$4k_1 k_2 / 2(k_1 + k_2) = 2^n \text{ elde ederiz.}$$

$k_1 = 2^{n-1-k} (2^k + 1)$  ve  $k_2 = 2^{n-1} (2^k + 1)$  ve  $0 < k < n$  ile üç asal sayının aşağıdaki yapısı elde edilir:

$$P_1 = 2^{n-k} (2^k + 1) - 1$$

$$P_2 = 2^n (2^k + 1) - 1$$

$$P_3 = (P_1 + 1)(P_2 + 1) - 1 = 2^{2n-k} (2^k + 1)^2 - 1.$$

<sup>51</sup> W. Borho, *a.g.e.*, s. 14.

<sup>52</sup> Bu bilgi için Dr. O. Neumann'a minnettarım.

Bu sonuç, yukarda verilen tipteki bütün dost sayılar için, yani  $a_1 = 2^n P_1 P_2$  ve  $a_2 = 2^n P_3$  tipleri için Euler kuralına eşdeğerdir.  $k = 1$  için Şâbit ibn Qurra'nın kuralının eşdeğeri bir uyarlama elde edilir.

İbn Fallûs ikinci tür dost sayıları şöyle tavsif etmektedir:

”المتحابة في الكيفية بان يكون احد العدد ين زوجا ويكون اجزاؤه فردا ويكون الاخر فردا ويكون اجزاؤه زوجا.“<sup>53</sup>

“Eğer iki sayıdan biri çift ve bölenleri tek ise ve de diğeri (sayı) tek ve bölenleri çift ise bunlar niteliğe göre dost (sayılar)dır.”

“Bölenleri” “bölenlerinin toplamı” olarak, yani sayının tam bölenlerinin toplamı olarak yorumlanması şartıyla bu ifade anlam doludur. Bu yorum İbn Fallûs'un eserinin ikinci bölümündeki fazlalıklı, eksikli ve niceliğe göre dost sayılar tanımlarını ifade biçimi ile doğrulanmaktadır. Burada yazar ilk bölümdeki tanımların tersine “bölenlerin toplamı” anlamında “bölenler” ifadesini kullanmaktadır.<sup>54</sup> Buradan, iki sayıya niteliğe göre dost sayılar denmektedir,

eğer  $a_1 = 2k_1$  ve  $G_0(a_1) = 2m_1 + 1$ ,

$a_2 = 2k_2 + 1$  ve  $G_0(a_2) = 2m_2$ ,

$k_i, m_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2$  ise.

Metinde örnek verilmemiştir. Bununla beraber, sadece aşağıdaki sayıların niteliğe göre dost sayılar olduğunu göstermek kolaydır:

$a_1 : 2^n, (2k_1)^2, 2^n(2k_1)^2, 2^n(2k_1 + 1)^2$

$a_2 : (2k_2 + 1)^2,$

$n, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ .

$(2k_1)^2$  ve  $2^n(2k_1)^2$ ,  $2^n$  ya da  $2^n(2k_1 + 1)^2$  nin özel durumlarından başka birşey değildir.  $a_1 = 2^n$  aşikâr olarak koşulları sağlamaktadır.

Eğer ve yalnızca eğer  $G[(2k_1 + 1)^2]$  ve  $G[(2k_2 + 1)^2]$  tek ise  $a_1 = 2^n(2k_1 + 1)^2$  ve  $a_2 = (2k_2 + 1)^2$  bunları sağlar.

<sup>53</sup> İsmâ'îl ibn İbrâhîm ibn Fallûs, *a.g.e.*, 21<sup>b</sup> yaprak, 9. satır.

<sup>54</sup> *a.g.e.*, 17<sup>b</sup> yaprak, 1-5.

$2k + 1 = P_1^{r_1} \cdot P_2^{r_2} \dots P_t^{r_t}$  asal sayı olsun,  $P_i \neq P_j \neq 2, \forall i, j \in \{1, \dots, t\}$ .

Eğer ve sadece eğer her faktör tek ise  $G[(2k + 1)^2] = \prod_{i=1}^t \left( \sum_{l=0}^{2r_i} P_i^l \right)$  tekdir.

Bu apaçıktır, çünkü her faktör tek terimlerin tek sayıda toplamıdır. Diğer bütün tek veya çift sayılar niteliğe göre dost sayı değildirler.

Üçüncü çeşit olan, niceliğe ve niteliğe göre dost sayılar İbn Fallûs tarafından önceki iki çeşitin özelliklerine sahip sayılar olarak tanımlanmıştır.<sup>55</sup>

Bu tanım şu anlama gelmektedir:

Eğer  $G_0(a_1) = a_2$  ve  $G_0(a_2) = a_1$  iken,  $a_1$  çift,  $G_0(a_1)$  tek ise;  $a_2$  tek ve  $G_0(a_2)$  çift ise  $a_1$  ve  $a_2$  ye niceliğe ve niteliğe göre dost sayılar denir. Böylece,

$$1. a_1 = 2^n, a_2 = (2k_2 + 1)^2 \text{ ya da}$$

$$2. a_1 = 2^n (2k_1 + 1)^2, a_2 = (2k_2 + 1)^2 \text{ ve } G_0(a_1) = a_2, G_0(a_2) = a_1$$

şeklindeki  $a_1, a_2$  ters parite çiftleri tam olarak araştırılabilir.

İlk durum bir tarafa bırakılacak kadar basittir, çünkü Kanold  $s, t, n$  ve  $m_i$  lerin tek olması halinde  $s = p^n, t = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \dots q_r^{m_r}, p \neq q_i \neq q_j$  sayılarının sadece dost olabileceklerini ispatlamıştır.<sup>56</sup> Bu ispattan ikinci durumdaki  $2k_2 + 1$ 'in bir asal sayının bir kuvveti olamayacağı tesadüfen çıkmaktadır. Buradan, ters pariteye sahip bir sayı çifti sadece eğer  $a_1 = 2^n(2k_1 + 1)^2, a_2 = (2k_2 + 1)^2$  ve  $2k_2 + 1$  bir asal sayının bir kuvveti değilse dost olabilir (bu formüllendirme İbn Fallûs'un niceliğe ve niteliğe göre dost sayılarına eşdeğerdir).<sup>57</sup>

<sup>55</sup> a.g.e., 21<sup>b</sup> varak, 10-12.

<sup>56</sup> H.-J. Kanold, "Über Befreundete Zahlen", *Mathematische Nachrichten*, cilt 9, 1953, s. 243-248.

<sup>57</sup> Yazmayı incelemeyi bitirdikten sonra H.-J. Kanold'un adı geçen eserini ve A.A. Goia ve A.M. Vaidya'nın *American Mathematical Monthly*'nin cilt 8, 74. sayısında s. 969-973 de çıkan "Amicable Numbers with Opposite Parity" adlı yazısını ve de Lee tarafından zikr edilen J.S. Madachy'nin *Journal of Recreational Mathematics* 5,2,1972, s. 77-93'de çıkan "The History and Discovery of Amicable Numbers" adlı makalesini okudum. Lee ve Madachy'nin incelemeleri bu makalede farklı pariteli dost sayıların yapısı hakkındaki düşünceler için temel olma hizmetini görmüştür. Goia ve Vaidya'nın eseri de farklı pariteli dost sayı çiftlerinin sadece  $2^n(2k_1 + 1)^2 (2k_2 + 1)^2, 2k_2 + 1$  yapısına sahip olabildiklerini göster-

Zamanımıza kadar böyle bir çift bilinmemektedir,<sup>58</sup> fakat zorunlu koşullar ve alt sınırlar ortaya konmuştur:

$a_1 = 2^n (2k_1 + 1)^2$  ve  $a_2 = (2k_2 + 1)^2$  dost sayılar olsun.

Şu aşağıdakiler geçerlidir:

1.  $a_1$  bir tam sayının ne dördüncü bir kuvvetidir ne de dördüncü kuvvetinin dört ya da sekiz katıdır.

2.  $2k_1 + 1$  bir kare değildir.

3. Eğer  $n = 1$  ise,  $a_2 < a_1$ ,  $(a_1, a_2) = 1$  olur;  $a_2$  hiç değilse beş farklı asal faktöre sahiptir,  $a_1 a_2 \equiv 2 \pmod{24}$ .  $a_2 > 10^{60}$

4. Eğer  $n > 1$  ise,  $a_1 < a_2$ ,  $(a_1, a_2) > 1$  dir.

5. Eğer  $n > 1$  tek ise,  $(2k_1 + 1, 3) = (2k_2 + 1, 3)$ , ve bir  $q$  asal sayısı olur.  $m \in \mathbb{N}$ ,  $q^m | 2k_2 + 1$  ve  $q^{m+1} \nmid 2k_2 + 1$  ve  $q \equiv m \equiv 1 \pmod{3}$ . Eğer  $m \equiv 3 \pmod{4}$  ise,  $q$  dan farklı olması zorunlu olmayan bir  $p$  asal sayısı mevcut olur, ve  $l \in \mathbb{N}$ ,  $p^l | 2k_2 + 1$  ve  $p^{l+1} \nmid 2k_2 + 1$  ve  $2p \equiv 1 \equiv 2 \pmod{5}$  ve  $2k_1 + 1 \equiv 2k_2 + 1 \equiv 1/4 (n+1) G [(2k_1 + 1)^2] \equiv 0 \pmod{5}$ .

6. Eğer  $2k_1 + 1 = p^s$  ise,  $n = 1, s > 6$ ,  $p \equiv 1 \pmod{12}$ ,  $a_2$ 'nin farklı asal faktörlerinin sayısı  $24$ 'den büyüktür ve  $a_2 > 10^{75}$ , dir.<sup>59</sup>

Yirminci yüzyıl matematikçileri tarafından elde edilen bu sonuçlar, üçüncü çeşit dost sayıları bulma probleminin ortaçağ matematikçileri tarafından çözülemediğini göstermektedir. Böylece, bu problem muhtemelen matematiksel bir bağlamdan doğmamıştır. Bu problemi ihtiva eden başka bir metin bilinmediğinden, bunun menşei veya başkaları üzerinde etkisi hakkında son bir cevap bu dönemde verilememiştir. Mamafî, İsmâîl ibn İbrâhîm ibn Fallûs'un açıklama tarzı bunun muhtemel menşeiine felsefî bir zeminde işaret etmektedir.

mektedir.  $2k_1 + 1$  yapısı üzerine daha başka önermeler de ortaya konmuştur. Kanıt,  $2k_2 + 1$  yapısına ilişkin daha keskin bir sonuç veren Kanold'un makalesinden bağımsızdır. Gioia'nın ve Vaidya'nın makalesinin dost sayıların tanımının doğru olmayan bir ifadesini işlediğine dikkat ediniz. Onlar, bir sayının bütün pozitif bölenlerinin toplamının diğer sayıya eşit olmasını istemekteler (s.69).

<sup>58</sup> E.J. Lee, J.S. Madachy, *a.g.e.*, s. 84'e göre  $a_1 = 2^n M^2$ ,  $a_2 = N^2$  formülü,  $M, N$  tek sayıları ilk defa O. Gmelin tarafından verilmişti (*Über Vollkommene und Befreundete Zahlen*, Diss., Heidelberg 1917, Halle/S., 1917) fakat bir gerçek olarak bunun en erken ortaya çıkışı H.-J. Kanold'dadır ("Über Befreundete Zahlen, II", *Mathematische Nachrichten*, cilt 10, 1953, s. 99-111).

<sup>59</sup> *a.g.e.*, s. 99-111; E.J. Lee, J.S. Madachy, *a.g.e.*, s. 84.

## TEŞEKKÜR

Dâr el-Kutub, Kahire, yazma B 23317,3 deki yazmayı elde etme imkânını bana sağlayan Prof. D. King'e (Frankfurt a.M.) ve makalemin İngilizce tercümesine ilişkin yardımları için Dr. J. Hogendijk'e (Utrecht) müteşekkirim.

Dr. Sonja Brentjes