NAZARİYAT
İslâm Felsefe ve Bilim Tarihi Araştırmaları Dergisi

İslâm Matematik Tarihinde Yüksek Dereceden Denklemler İçin Genel Çözüm Yöntemi Arayışları: *İrşâdu't-tullâb* Örneği

Elif Baga*

Özet: Bu makalede, IX/XV. yüzyılda, muhtemelen Osmanlı topraklarında yaşamış meçhul bir müellifin yazdığı ve dönemin hükümdarı Sultan II. Bayezid'e sunduğu *İrşâdu't-tullâb ilâ ilmi'l-hisâb* adlı eserin hatimesinde yer alan, değişkenlerinin üsleri ardışık olmak şartıyla üç, dört, beş ve altıncı dereceden denklemlerin çözümünde kullandığı, tespitlerimize göre, o döneme kadar benzerine rastlanmayan bir yöntem tanıtılacaktır. Bunun için, öncelikle, konu ile ilgili kısa bir girişin ardından, üç ve daha yüksek dereceden denklemler ve çözüm yöntemlerinin tarihi hakkında özet bilgiler verilecek, daha sonra da eserin hatimesinin matematiksel tetkikine geçilecektir. Kısa bir sonuç ve değerlendirmenin sonunda yazma hâlindeki metnin tahkikli Arapça metni ve Türkçe tercümesi sunulacaktır.

Anahtar Kelimeler: Yüksek Dereceden Denklemler, Osmanlılarda Cebir, Osmanlılarda Matematik, Denklem Çözme Yöntemleri, İrşadu't-tullab.

Abstract: In this article, we will introduce a book, titled as *Irshād al-tullāb ilā 'ilm al-hisāb*, written by an anonymous author who probably lived in Ottoman lands and presented his book to Ottoman Sultan Bayezid II; and an equation solving method in the epilogue of the book, unknown up to its period according to our research, which he used to solve third, fourth, fifth and sixth degree equations whose degrees of variables are successively ordered. Following a short introduction on the subject, first we will summarize the history of solving methods for third and higher degree equations, and then we will examine the mathematical analysis of the book's epilogue. We will present, after a short conclusion, the Arabic text of the manuscript and its Turkish translation.

Keywords: Equations of High Degree, Algebra in the Ottomans, Mathematics in the Ottomans, Equations Solving Methods, Irshad al-Tullab.

* Yrd. Doc., Dr., Bingöl Üniversitesi, İlahiyat Fakültesi, İslâm Felsefesi Bölümü.
İletişim: elifbaga@gmail.com.

DOI http: dx.doi.org/ 10.15808/Nazariyat.1.1.M0004

Atıf© Baga, Elif, "İslâm Matematik Tarihinde Yüksek Dereceden Denklemler İçin Genel Çözüm Yöntemi Arayışları: irşâdu't-tullâb Örneği", *Nazariyat: İslâm Felsefe ve Bilim Tarihi Araştırmaları Dergisi* 1/1 (Ekim 2014): 117-139.

Giriş

İslâm siyasi hakimiyetinin hüküm sürdüğü topraklarda asırlar boyu yürütülen her türlü matematiksel faaliyetin yekûnunu ifade eden İslâm matematik tarihinin başlangıcı, çoğunlukla, III/IX. yüzyıla dayandırılır. Zira hem önceki medeniyetlerden tevarüs edilen matematik kitaplarının Arapçaya çevirileri hem de mevcut birikimden hareketle yeni matematik dallarının inşası, bu yüzyıldan itibaren ortaya çıkmıştır. Bu yeni dallardan belki de en önemlisi Harezmî'nin (ö. 232/847'den sonra) hakkında ilk kez dizgeli ve bağımsız bir eser kaleme aldığı *cebir ve mukâbele* ilmidir. İlim dalının *cebir ve mukâbele* şeklinde anılması da Harezmî'nin çalışmasına bu adı vermesiyle doğrudan ilgilidir. Kısaca, bilinen değerler yardımıyla, belirli yöntemler kullanarak, bilinmeyen ve bilinmesi istenen değerlere nasıl ulaşılacağının anlatıldığı eserde üçü lineer (birinci derece) üçü de kuadratik (ikinci derece) olmak üzere altı temel denklem türü (*mesâil-i sitte*) ortaya konulur. Ayrıca, altı denklem türünün dışında kalan, ancak bu türlerden birine dönüştürülebilen kuadratik denklemlerin dönüştürme yöntemi ve süreçlerine de yer verilir. Harezmî'nin ardından en yakın halefleri, onun yaptıklarına ilave olarak, altı denklem türünden herhangi birine dönüştürülmesi mümkün kübik (üçüncü derece) ve daha yüksek dereceden belirli ve belirsiz denklemlerin analitik çözüm yöntemlerini araştırmışlardır. IV/X. yüzyıldan itibaren ise İslâm dünyasındaki matematikçilerin, temel denklem formlarından birine dönüştürülemeyen yüksek dereceden denklemlerin hisabî ve hendesî çözüm yöntemleri hususunda ciddi mesai harcadıkları, hatta bunun için tam ve rasyonel sayıların rasyonel ve irrasyonel köklerini tespit etme, polinomların karekökünü alma, üçüncü dereceden denklemleri koni kesiti kullanarak çözüp ispatlama ve cisim problemlerinin ilk cebirsel çevirilerini ortaya koyma hususlarında dikkate değer ilerleme kaydettikleri söylenebilir.[1] İşte bu matematikçilerden biri de İslâm medeniyeti matematik geleneğinin doğal bir devamı olan Osmanlı matematiğinin IX/XV. yüzyıldaki temsilcilerinden *İrşâdu't-tullâb ilâ ilmi'l-hisâb* adlı eserin müellifidir. *Hesap Biliminde Öğrencilere Kılavuz* şeklinde Türkçeye çevrilebilecek bu telif, meçhul müellifi tarafından dönemin hükümdarı Sultan II. Bayezid'e (1481-1512) sunulmuştur.

Eser, tam ve rasyonel sayılar hesabı, cebir ve mesaha alanlarını içeren genel bir matematik kitabıdır.[2] *İrşâdu't-tullâb*'ı dönemin diğer matematik kitaplarından ayıran ve bu makaleye konu olmasını temin eden gerekçe ise, müellifin cebir ve mukâbele ilmine dair üçüncü makalenin altı temel denklem formunu verdiği ikinci

1 Kerecî'nin *el-Fahrî fi'l-cebr ve'l-mukâbele* ve *el-Bedî' fî a'mâli'l-hisâb*'ı, Semev'el Mağrîbî'nin *el-Bâhir fi'l-cebr*'i, Ömer Hayyâm'ın *el-Makâle fi'l-cebr ve'l-mukâbele*'si, Şerefeddin et-Tûsî'nin *el-Mu'âdelât*'ı, Nizâmeddin Nîsâbûrî'nin *eş-Şemsiyye fi'l-hisâb*'ı, İbnü'l-Hâim'in *el-Mümti' fî şerhi'l-Mukni*'si ve Ali Kuşçu'nun *el-Muhammediyye fi'l-hisâb*'ı konu ile ilgili başta gelen çalışmalardır.

2 Eserin ayrıntılı tanıtım ve değerlendirmesi için bkz. İhsan Fazlıoğlu, "İrşâdu't-Tullâb ilâ İlmi'l-Hisâb [Hesap Biliminde Öğrencilere Kılavuz]", *Dîvân İlmi Araştırmalar*, 13 (2002/2), 315-340.

babındaki ifadeleriyle, o ifadeleri ele aldığı hatime bölümüdür. Buna göre yazar, altı temel denklem türünün bu türlere uygun olan veya bunlardan birine indirgenebilen problemlerde işe yaradığını, ancak indirgenmesi mümkün olmayan problemlerde başka bir yöntemin gerektiğini, kendisine ait bu yöntemi de eserin hatimesinde açıklayacağını ifade eder.[3]

I. Yüksek Dereceden Denklemlerin Kökeni ve Gelişimi

Lineer ve kuadratik denklemlerin kökeni MÖ 2000'li yıllara kadar giderken, üçüncü dereceden denklemlerin hisabî ve hendesî çözüm yöntemlerine IV/X-V/XI. yüzyıldan itibaren rastlanır. Hendesî çözüm ile ispatlar dördüncü ve daha yüksek dereceden denklemlerde kullanılamadığından bu tür denklemlere hisabî çözüm arayışları hemen hemen aynı dönemlerde görülür. MS III. yüzyılda Diophantos'un *Aritmetika*'sında[4] dördüncü dereceye kadar çıkan denklem örnekleri bulunsa da, hem eserin çoğunlukla belirsiz denklemlere hasredilmiş olması hem de cebir yönteminden ziyade sayısal analizi kullanması, bu konudaki ilk teşebbüslerin, aşağıda ortaya konan açıklamalar ışığında, İslâm medeniyetinde vuku bulduğu söylenebilir.

Harezmî'nin ardılı Sâbit b. Kurre (ö. 288/901), kendisinden yaklaşık bir buçuk asır sonra Ömer Hayyâm'ın kübik denklemlerin pozitif köklerini bulmak için geliştireceği yönteme benzer bir yaklaşımla, bir daire ile bir hiperbolün kesişme noktalarını tespit ederek kübik bir denklemi çözmeyi başarmıştır.[5] Sâbit b. Kurre'nin çağdaşı Mâhânî (ö. 266/880 civarı) ise "bir düzlemle bir küreyi, hacimleri arasındaki oranı bilinen iki eşit parçaya bölme" şeklindeki katı cisimler problemini $\{x^3+a=cx^2\}$ formundaki üçüncü dereceden bir denkleme dönüştürmüştür. "Mâhânî denklemi" olarak anılan bu denklemi Hâzin (ö. 360/971 civarı), koni kesitlerini kullanarak çözmüş, böylece üçüncü dereceden denklemlerin hendesî/geometrik çözümünün yolunu açmıştır.[6] Cebrin kanıtlanmış hendesî gerçekler olduğunu söyleyerek analitik geometrinin ilk taşlarını döşeyen Ömer Hayyâm (ö. 525/1131), klasik denklem tasnifindeki altı denklem türüne on üç tane üçüncü dereceden denklem türünü de ilave ederek on dokuz denklemli yeni bir tasnif ortaya koymuştur.[7] VI/XII. asır matematikçilerinden Şerefeddin Tûsî, selefi Hayyâm'ın çalışmalarını daha ileri götürerek denklem türlerinin sayısını yirmi beşe çıkarmış ve hendesî çözüm ve ispatın yanın-

3 *İrşâdu't-tullâb ilâ ilmi'l-hisâb*, Topkapı Sarayı Kütüphanesi, III. Ahmed 3144, 64b-65a.

4 Diophantos, *Sınâ'atu'l-cebr*, çev. Kosta b. Luka, thk. Rüşdî Râşid (Mısır, 1975).

5 B. A. Rosenfeld ve A. T. Grigorian, "Thabit Ibn Qurra", *DSB*, XIII, 291; Rüşdî Râşid, *Mevsû'âtu târîhi'l-ulûmi'l-Arabiyye*, c. II (Beyrut: Merkez Dirâsâtu'l-Vahdeti'l-Arabiyye, 1997), 468.

6 Yvonne Dold-Samplonius, "al-Mahani", *DSB*, IX, 21; Râşid, *Mevsû'ât*..., c. II, 468-469.

7 Ömer Hayyâm, "el-Makâle fi'l-cebr ve'l-mukâbele", *Resâ'ilu'l-Hayyâm el-cebriyye* içinde, thk. Rüşdî Râşid ve Ahmed Cebbâr (Halep, 1981), 5-13.

da bugün Ruffini-Horner metodu olarak bilinen, kaynağı Kerecî Okulu'na dayanan, polinomları bölmeye ve köklerini çıkarmaya yarayan yöntemle denklem köklerini bulmaya çalışmıştır.[8] Hendesî cebircilerin bu çalışmaları üçüncü dereceden denklemlerin yaygınlaşmasına ve dönemin matematikçilerinin bu yönde cesaretlenmesine vesile olmuştur. Ancak onların, muttasıl nicelikleri dış dünyadan soyutlama yoluyla elde ettikleri için dördüncü boyutu, buna bağlı olarak da dördüncü ve daha yüksek dereceden denklemleri reddedip eleştirmeleri cebir ilminin bu konudaki gelişimini olumsuz yönde etkilemiş olabilir.

Yüksek dereceden denklemlerin gelişimini hendesî cebir bağlamında değerlendirdikten sonra bu denklemlere, cebir tarihindeki diğer bir yönelim olan hisabî cebir geleneğinin çalışmaları ışığında bakılabilir. Öncelikle, hisabî cebirciler, hendesî cebirciler gibi denklem türlerini üçüncü derece ile sınırlamaya çalışmadıklarından, aksine, mümkün olabildiğince daha yüksek dereceden denklemler ortaya koymaya ve yaklaşık da olsa bir sonuç elde etmek için çeşitli yöntemler keşfetmeye çabaladıklarından bu konudaki asıl katkıyı onların yaptığı söylenebilir.

Hisabî cebir geleneğinin temellerini atmasıyla cebir ilminin müceddidi unvanını kazanan Kerecî (ö. 410/1019'dan sonra) ve cebrin hisabîleştirilmesi ve bu yolla genişletilmesi programıyla öne çıkan Kerecî Okulunun bu katkıdaki payı büyüktür. Ancak ondan bir asır önce III/IX. yüzyılda Sinân b. Feth'in niceliklerin kuvvetlerini tanımladığı ve onlarla ilgili oranları verdiği *Risale fi'l-ka'b ve'l-mâl ve'l-a'dâdi'l-mütenâsibe* adlı çalışmasıyla üçüncü ve daha yüksek dereceden denklemlerin yolunu aydınlatacak ilk ışığı yaktığını belirtmek gerekir.[9] Kerecî'ye gelince, seleflerinin çizgisi üzerinde ikinci dereceden denklemleri gözden geçirmiş, daha yüksek dereceden denklemleri ise ikinci dereceye indirgemek suretiyle çözmeye çalışmış, halefleri ise üçüncü ve dördüncü dereceden denklemleri indirgemeksizin, doğrudan tetkik etme yolunda önemli adımlar atmışlardır.[10] Kerecî Okulunun en önemli üyelerinden Semev'el el-Mağribî (ö. 575/1180) $\{y^3=ax+b\}$ ve $\{y^3=ax^2+bx\}$ şeklindeki denklemleri gözden geçirerek yüksek dereceden denklemlerin çözümünde büyük rol oynayan polinom bölümü ve polinom kökü bulma konularında dikkate değer gelişmeler ortaya koymuştur.[11] On iki terimli bir polinomu dört terimli polinoma ve sekiz terimli bir polinomu da üç terimli polinoma bölerek oldukça uzun ve zor olan bu işlemleri, cetveller yardımıyla pratik ve

8 Rüşdî Râşid, *el-Cebr ve'l-hendese fi'l-karni's-sâni aşer: müellefât Şerefeddîn et-Tûsî* (Beyrut: Merkez Dirâsâtu'l-Vahdeti'l-Arabiyye, 1998), 91-160, 176-177, 450-680.

9 Sinân b. Feth ve eseri hakkında daha fazla bilgi için bkz. Rüşdî Râşid, *Târîhu'r-riyâdiyyât el-Arabiyye beyne'l-cebr ve'l-hisâb* (Beyrut: Merkez Dirâsâtu'l-Vahdeti'l-Arabiyye, 2004), 24-25, 31; Râşid, *Mevsû'ât...*, c. II, 469; İhsan Fazlıoğlu, "Harranlı Matematikçilerin Matematiğin Oluşumundaki Katkıları", *Şafak Ural'a Armağan*, ed. Yücel Yüksel (İstanbul: Alfa Yayınları, 2012), 223-236.

10 Râşid, *Mevsû'ât...*, c. II, 473; Râşid, *Târîhu'r-riyâdiyyât...*, 35; Ahmed Selim Saidan, *Târîhu ilmi'l-cebr fi'l-âlemi'l-Arabi* (Kuveyt, 1985), 83; Rüşdî Râşid, "al-Karaji", *DSB*, VII, 242.

11 Adel Anbouba, "al-Samaw'al", *DSB*, XII, 92-93; Râşid, *Mevsû'ât...*, c. II, 472; Fazlıoğlu, "Semev'el-Mağribî", *DİA*, XXXVI, 480-489.

basit bir şekilde yapmıştır.[12] Osmanlı coğrafyasında eserlerinin yaygınlığıyla Osmanlı matematik geleneğinin kurucu temsilcilerinden sayılan ve bu makaleye konu olan *İrşâdu't-tullâb*'ın hatimesinde de adı geçen İbnü'l-Havvâm'ın (ö. 724/1324) *el-Fevâ'idu'l-Behâ'iyye fi'l-kavâ'idi'l-hisâbiyye*'sinin çözümsüz denklemler bahsi, yüksek dereceden denklem örneklerinin bolca görüldüğü kaynaklardan biridir.[13] Mağrip-Mısır matematik geleneğinin Osmanlı dâhil çok geniş bir alanda etkili olmasını sağlayan İbnü'l-Hâim'in (ö. 815/1412) *el-Mümti' fî şerhi'l-Mukni'* adlı saf cebir çalışmasının, eldeki veriler ışığında, yüksek dereceden denklemler ve çözüm yöntemleri hakkında en kapsamlı bilgileri ihtiva ettiği söylenebilir. Ancak bu denklemlerin bir kısmı *İrşâd* yazarının çözmeye çalıştığı üç ve daha yüksek dereceden denklemlerden, yani $\forall a^0, a^1, \ldots, a_n \in R \setminus \{0\}$ olmak üzere $a_0, a_1x + \ldots, a_nx^n$ formundaki denklemlerden farklı olarak sabit terim içermezken bir kısmı da benzer özelliktedir. Bununla birlikte İbnü'l-Hâim indirgeme, yerine koyma ve varsayma gibi modern matematikte de görülen teknikler kullanırken *İrşâd* yazarı tamamen farklı bir yöntemden bahsetmektedir. Müellifin, yönteminin daha önce ortaya konulmamış, ilim ehlini şaşırtan, benzersiz bir yöntem olduğunu vurgulaması[14] da muhtemelen bu nedenledir.

İrşâd'dan önceki, yukarıda adları zikredilen matematikçilerin yüksek dereceden denklem örneklerine kısa bir biçimde bakılacak olursa; Kerecî'nin denklemleri yedinci dereceye kadar çıkan, ancak sadeleştirme ve yerine koyma gibi çeşitli yöntemlerle altı temel denklem türünden birine indirgenerek çözülebilen denklemlerdir. Birkaç örnek vermek gerekirse:[15]

Örnek 1:

$$x^4 + 5x^2 = 126 \quad \Rightarrow x^2 = x \text{ varsayılırsa denklem } x^2 + 5x$$

$$= 126 \;\; olur \;\; ve \;\; x^2 + \mathrm{bx} = \mathrm{c} \quad \Rightarrow \quad x$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} \text{ olduğundan } x = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 126} - \frac{5}{2}$$

$$= \sqrt{6 + \frac{1}{4} + 126} - \frac{5}{2} = \sqrt{132 + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2} = 11 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = 9$$

$$\Rightarrow \; x^2 = x \text{ varsayıldığından } \boldsymbol{x^2 = 9 \; \Rightarrow \; x^4 = 81}$$

12 Semev'el Mağribî, *el-Bâhir fi'l-cebr*, thk. Salah Ahmed ve Rüşdî Râşid (Dımeşk, 1972), 44-50.

13 Müellif ve eseri ile ilgili ayrıntılı bilgiler için bkz. İhsan Fazlıoğlu, "İbn el-Havvâm ve Eseri *el-Fevâ'id el-Behâ'iyye fi el-Kavâ'id el-Hisâbiyye* Tenkitli Metin ve Tarihi Değerlendirme" (yüksek lisans tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, 1993); İhsan Fazlıoğlu, "İbn El-Havvâm, Eserleri ve *el-Fevâ'id el-Behâ'iyye fi el-Kavâ'id el-Hisâbiyye*'deki Çözümsüz Problemler Bahsi", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları Dergisi* 1 (1995): 69-128.

14 *İrşâdu't-tullâb*..., 4a-4b.

15 Kerecî, "Kitâbü'l-Fahrî li'l-Kerecî", *Târîhu ilmi'l-cebr fi'l-âlemi'l-Arabî* içinde, Ahmed Selim Saidan, c. I, 164-165.

Örnek 2:

$$x^5 + x^3 = x^7 \Rightarrow \frac{x^5}{x^3} + \frac{x^3}{x^3} = \frac{x^7}{x^3} \Rightarrow \quad x^2 + 1 = x^4 \ \ olur.\ x^2$$

$$= x \ varsayılırsa\ \ denklem\ \ x + 1 = x^2 \ \ olur.\ \ bx + c$$

$$= x^2 \Rightarrow \quad \mathrm{x} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2} \ \ olduğundan\ x$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2}$$

İbnü'l-Havvâm'ın, o dönemde henüz çözülemediğini ya da çözümünün mümkün olup olmadığının bilinmediğini ifade ettiği denklemlere gelince, şöyle dile getirilebilir:[16]

Örnek 1: Tam küp bir sayı bulmak istiyoruz. Bu tam küp sayı ile onun tam karesi arasındaki fark (yine) bir tam karedir.

$(a^3)^2$ - a^3=$b^2 \Rightarrow a^6$-a^3=b^2 veya a^3 - $(a^3)^2$=$c^2 \Rightarrow a^3$ - a^6=c^2

Örnek 2: Tam kare bir sayı bulmak istiyoruz. Onu kendisi ile çarpıp sonuca kökünün 10 katını ve 10 dirhem eklersek, toplamın kökü vardır.

$(a^2 . a^2) + 10a + 10 = b^2 \Rightarrow a^4 + 10a + 10 = b^2$

Yüksek dereceden denklemlerle ilgilenen matematikçilerinden biri olan İbnü'l-Hâim'den de üç örnek verilebilir ki, İbnü'l-Hâim'in eserleri, İslâm coğrafyasında yaygın olarak kullanıldığından bu konuda belirli bir bilinç oluşturduğu söylenebilir:

Örnek 1:[17]

$$20x^3 = 5x^4 + 2x^5 + \frac{x^5}{2} \Rightarrow \qquad 5x + 2x^2 + \frac{x^2}{2} = 20 \quad \Rightarrow \ x = 2, x^2$$

$$= 4, x^3 = 8,\ \ x^4 = 16,\ \ x^5 = 32,\ \ 2x^5 + \frac{x^5}{2} = 80,\ \ 5x^4$$

$$= 80,\ \ 20x^3 = 160$$

16 İbnü'l-Havvâm, *Fevâ'idü'l-Behâ'iyye fi'l-kavâ'idi'l-hisâbiyye*, Süleymaniye Kütüphanesi, Hasan Hüsnü Paşa 1292/8, 99a.

17 İbnü'l-Hâim, *el-Mümti' fî şerhi'l-Mukni'*, Süleymaniye Kütüphanesi, Şehid Ali Paşa 2706, 77b.

Örnek 2:[18]

$$\boldsymbol{x^4+2x^3=x+30} \Rightarrow (x^2+x)^2 = x^4+2x^3+x^2 \Rightarrow x^4+2x^3+x^2$$
$$= x^2+x+30 \;\Rightarrow (x^2+x)^2 = x^2+x+30 \;\Rightarrow \boldsymbol{x^2+x}$$
$$= \boldsymbol{y} \;\; varsayılırsa \;\Rightarrow y^2 = y+30 \;\Rightarrow\; y=6 \Rightarrow x^2+x$$
$$= 6 \;\;\Rightarrow \boldsymbol{x=2},\;\; x^2=4,\;\; x^3=8,\;\; x^4=16 \;\Rightarrow x^4+2x^3$$
$$= 16+16 = 32$$

Örnek 3:[19]

$$x^7 = 28x+4x^4+\frac{x^4}{2} \;\Rightarrow \boldsymbol{değişkenlerin\ üsleri}\ 3'er\ ardışık\ 7,4,1$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{değişkenlerin\ üsleri}\ 2,1,0'a\ indirgenirse\ denklem$$
$$\Rightarrow x^2 = 28+4x+\frac{x}{2}\;\; olur \;\Rightarrow\; x =$$
$$= 8\ olur\ ve\ 3'er\ ardışık\ olduğundan\ aslında\ \boldsymbol{x^3}$$
$$\boldsymbol{= 8\ \ ve\ \ x = 2}\ \ olur.$$

İslâm medeniyeti matematik tarihindeki yüksek dereceden denklem çözümlerinden çeşitli örnekler verdikten sonra, *İrşâd*'ın meçhul müellifinin tabiriyle, şimdiye kadar benzerine rastlanmayan çözüm yönteminin, modern matematik diliyle değerlendirmesi sunulabilir.

II. Matematiksel Çözümleme

Matematiksel çözümlemeye geçmeden önce, bölümün kısa bir özetini vermek gerekirse, müellif, *İrşâd*'ın üçüncü makalesini oluşturan cebir ve mukâbele bahsine, doğrudan yöntemini ilgilendiren kurallarla başlar. Öncelikle denklemin bilinen terimlerden, yani sayılardan ve bilinmeyen terimlerden meydana geldiğini ortaya koyar ve bu terimlerin üs ve kök durumlarını araştırır. Ardından, keşfettiği çözüm yönteminin kullanılabilmesi için, denklemdeki bilinmeyen terimlerin üslerinin eşitliğin hangi tarafında olduklarına bakılmaksızın birer, ikişer, üçer vb. ardışık olması gerektiğinin altını çizerek, eşitliğin sağ ve sol tarafına, oradaki terimlerin üs durumlarına göre farklı isimler verir. Bundan sonra denklemde kesirli sayı bulunup bulunmaması ve denklemin herhangi bir tarafında tek terim olup olmaması durumlarına göre çözüm formülünün farklı versiyonlarını izah eder. Son olarak da biri VII/XIII-VIII/XIV. yüzyıl bilginlerinden İbnü'l-Havvâm'a ait bir problem ve biri de miras problemi olmak üzere çeşitli problem ve çözümleriyle yönteminin uygulamasını ortaya koyar.

18 İbnü'l-Hâim, *el-Mümti'*..., 78b.
19 İbnü'l-Hâim, *el-Mümti'*..., 77b-78a.

1. Değerlerin (a, a^2, a^3 ...) durumları

Herhangi bir sayı ilk kökü (dıl‘) ile çarpıldığında sonuç, üs değeri o sayının üs değerinden bir derece fazla olan sayıdır. Bölmede de işlem tam tersidir, yani herhangi bir sayı ilk köküne bölündüğünde sonuç, üs değeri o sayının üs değerinden bir derece eksik olan sayıdır. Yazarın, sayıların ilk kökleriyle çarpıldıklarında veya bölündüklerinde üslerinin ardışık olarak artma ve eksilme durumuna yaptığı vurgu muhtemelen çözüm yöntemini sunacağı denklem türlerine aşinalık sağlamaya yöneliktir.[20]

$$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\}\ \boldsymbol{ve}\ \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^{+} \Rightarrow \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}.\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{2n}}\ \boldsymbol{ve}\ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}.\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m+n}}\ \boldsymbol{olduğundan}:$$

$$a.a = a^2$$

$$a^2.a = a^3$$

$$a^3.a = a^4$$

$$a^4.a = a^5$$

$$\infty$$

$$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\}\ \boldsymbol{ve}\ \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^{+}\ \boldsymbol{ve}\ \boldsymbol{n} > m \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{0}}\ \ \boldsymbol{ve}\ \ \frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-m}}$$

$$\infty$$

$$\frac{a^5}{a} = a^{5-1} = a^4$$

$$\frac{a^4}{a} = a^{4-1} = a^3$$

$$\frac{a^3}{a} = a^{3-1} = a^2$$

$$\frac{a^2}{a} = a^{2-1} = a^1$$

$$\frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$$

20 *İrşâdu’t-tullâb*..., 111a-111b.

2. Tanımlar

Müellif, vereceği çözüm yolunun, ortaya koyduğu türdeki denklemlerde, yani eşitliğin her iki tarafındaki değişken terimlerin üslerinin bütün olarak bir ardışıklık meydana getirdiği denklemlerde kullanılabileceğini, bu yüzden de bir denklemi çözmeye başlamadan önce denklemin bu şartı gerçekleyip gerçeklemediğinin kontrol edilmesini öğütler. Eğer bu şart sağlanmışsa bu sefer denklemin sağ ve sol tarafındaki terimlerin üslerine bakılır ve üssü ya da üsleri daha büyük olan tarafa *makîs aleyh*/ölçü olarak alınan, diğer tarafa da *makîs*/ölçülen adı verilir. Böylece bir sonraki işlem için olası bir karışıklığın önüne geçilir.[21]

$\forall\ a, b, c, d, e$

$\in \mathrm{R}\backslash\{0\}$ ve *m,n,p,q ardışık pozitif tam sayılar olmak üzere*

$\Rightarrow ax^m + bx^n = cx^p + dx^q + e(x^0)$ *denkleminde* $m,n > p,q$

$\Rightarrow$ denklemin sol tarafı $\Rightarrow$ makîs aleyh, sağ tarafı $\Rightarrow$ makîs

3. Yüksek dereceden denklemleri çözme yöntemi

Tanımlamaların ardından denklemlerin çözüm formülüne geçilir. Ancak önce denklemdeki terimlerde tam ya da kesirli sayı olup olmadığına bakılmalıdır, zira bu durumlara göre formül farklılaşır.

3.1. Denklem terimlerinde kesirli sayı bulunmadığında çözüm yöntemi

Eğer denklemde sadece tam sayılar var ve denklemin her iki tarafında da birden fazla terim bulunuyorsa problemin çözüm kümesi aralığı aşağıdaki formüle göre bulunur.[22]

$$\forall\ b,c,d \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \ ve\ \ m,n,p\ ardışık\ pozitif\ tam\ sayılar\ olmak\ üzere$$
$$\Rightarrow x^m + bx^n = cx^p + d(x^0)\ \ denkleminde\ m > n$$
$$> p\ \ \ ve\ m - 0 = m \Rightarrow x^m \geq cm^p + d \quad \Rightarrow \quad x$$
$$\cong \sqrt[m]{cm^p + d}\ olur.$$

Örnek:[23]

$$x^3 + 4x^2 = 10x + 31 \quad \Rightarrow x^3 + 4x^2 = 10x + 31(x^0)$$
$$\Rightarrow \quad en\ büyük\ ve\ en\ küçük\ üs\ arasındaki\ fark$$
$$\Rightarrow \quad 3 - 0 = 3\ \Rightarrow x^3 \geq 10.3 + 31\ \Rightarrow x^3 \geq 61\ \Rightarrow \mathrm{x}$$
$$\geq \sqrt[3]{61} \Rightarrow\ x \cong 3$$

21 *İrşâdu't-tullâb*..., 111b.

22 *İrşâdu't-tullâb*..., 111b-112a.

23 *İrşâdu't-tullâb*..., 113a.

Örnekte de görüldüğü üzere müellifin, yönteminin kesin ve tam sonuca ulaştıracağına dair bir iddiası yoktur. Bu yöntemle, yanılma payı mevcut olan ya yaklaşık bir sonuç ya çözüm kümesi aralığı ya da tam sonuç elde edilebilir. Bu ve bundan sonra verilecek formüller, denklemde bilinmeyenin yerine konarak eşitliği sağlayabilecek sayıya ulaşmak için tahmin edilen sayıları sınırlayarak daha hızlı ve kolay bir çözüm olanağı sunar.

Aynı denklem modern matematikteki herhangi bir denklemin tam sayı olan köklerini bulma yöntemiyle çözülürse:

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in Z \Rightarrow x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ n'inci dereceden bir polinom denklemidir.

Bir p tamsayısı bu denklemin bir kökü ise p sayısı a_n sabit teriminin bir bölenidir.

Örnek:

$x^3+4x^2=10x+31$ denklemini polinom denklemi formuna getirirsek

$\Rightarrow x^3+4x^2-10x - 31=0$

$\Rightarrow$ 31' in bölenleri {1,-1,31,-31}dir.

Bu bölenlerin her biri denklemde yerine konulup denendiğinde hiçbirinin denklemi sağlamadığı görülür, öyleyse bu denklemin tamsayı bir kökü yoktur. Diğer köklerini bulmak için de Francois Viete'nin (1540-1603) ortaya koyduğu trigonometrik çözüm yolunu kullanmak gerekmektedir. Bu yöntem üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerde kesin sonuç verse de uzun ve kullanışsız bir metot olarak bilinmektedir.

3.1.1. Makîs tek terim ise:

Eğer denklemin terimleri tam sayı, ancak taraflardan birinde tek terim mevcut ise, formül bir miktar değişmektedir. Buna göre değişken terimin üssü daha küçük olan taraf yani makîs tek terimden ibaretse, aşağıdaki formül uygulanır:[24]

$$\forall\ b,c,d,e$$
$$\in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \textit{ve}\ m,n,p,q\ \textit{ardışık pozitif tam sayılar olmak üzere}$$
$$\Rightarrow x^m + bx^n + cx^p + dx^q = e(x^0)\ \textit{denkleminde}\ m > n > p > q$$
$$\Rightarrow\ m - 0 = m\ \textit{olduğundan}\ x^m \geq e\ \Rightarrow\ x \cong \sqrt[m]{e}\ \textit{veya}\ x \cong \sqrt[m]{e} - 1$$

24 *İrşâdu't-tullâb…*, 112a.

Örnek:[25]

$$x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x = 66(x^0) \;\; \textit{olduğundan} \;\; 4 - 0 = 4 \;\; \Rightarrow x^4 \geq 66$$
$$\Rightarrow \;\; x \cong \sqrt[4]{66} \;\; \textit{veya} \;\; x \cong \sqrt[4]{66} - 1 \Rightarrow x \cong 3 \;\; \textit{veya} \;\; x \cong 2$$
$$\Rightarrow \textit{denklemi} \;\; x = 2 \;\; \textit{sağladığından} \;\; ÇK = \{2\}$$

Formüle göre, çözüm kümesi olması muhtemel sayı veya sayılar bulunduktan sonra, mutlaka denklemde yerine konularak denenmelidir. Buna göre:

$$x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x = 66(x^0) \; \textit{denkleminde} \;\; x = 2$$
$$\Rightarrow \; 2^4 + 2.2^3 + 6.2^2 + 5.2 = 66 \;\; \Rightarrow \;\; 16 + 16 + 24 + 10$$
$$= 66 \;\; \Rightarrow \;\; 66 = 66$$

Müellif bu çözümün ardından,VII/XIII-VIII/XIV. yüzyıl bilginlerinden İbnü'l-Havvâm'ında aynı denklemi farklı bir şekilde ortaya koyduğu bilgisini verir. Ancak İbnü'l-Havvâm'ın çözümsüz problemleri konu edinen ve günümüze ulaşan matematik eseri *el-Fevâ'idu'l-Behâ'iyye fi'l-kavâ'idi'l-hisâbiyye*'sinin ne cebir ne de çözümsüz problemler/denklemler bölümünde böyle bir soruya rastlanır. Bununla birlikte meçhul müellifin, İbnü'l-Havvâm'ın, bugün elimizde olmayan, başka bir matematik kitabına atıfta bulunması da muhtemeldir. Burada yazarın atfı, kesin bir şekilde doğrulanamasa da, Osmanlı matematik geleneğinde, hem İbnü'l-Havvâm'ın hem de çözümsüz denklemler geleneğinin, belli bir yere sahip olduğunu gösterir. İbnü'l-Havvâm'a atfedilen problem ve bu problemin *İrşâd*'da verilen denkleme dönüşümü şöyledir:[26]

$$\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{\sqrt{x^2}} + 3\right).\left(2\sqrt{x^2} + 2\sqrt{\sqrt{x^2}} + 4\right) = 144 \quad \Rightarrow \quad x^2$$
$$= x^4 \; \textit{varsayılırsa}$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^4} + \sqrt{\sqrt{x^4}} + 3\right).\left(2\sqrt{x^4} + 2\sqrt{\sqrt{x^4}} + 4\right)$$
$$= 144 \;\; \textit{olur}. \Rightarrow \;\; (x^2 + x + 3).(2x^2 + 2x + 4) = 144$$
$$\Rightarrow 2x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 10x + 12 = 144$$
$$\Rightarrow \quad x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x = 66$$

İrşâd yazarı, denklemi verdikten sonra İbnü'l-Havvâm'ın problem çözmede yol gösterici bir sözünü nakleder:

25 *İrşâdu't-tullâb*..., 113a-113b.

26 *İrşâdu't-tullâb*..., 113b-114a. Ayrıca bkz. Fazlıoğlu, "İbn El-Havvâm, Eserleri...", 109-110.

ثم قال: وإستخراج الجواب في مثل هذه المواضع إنّما يكون بالفكر والطلب والتتبع. فإنه ما لنا طريق يستخرج به الشيء في مثل هذه الصور.

Sonra [İbnü'l-Havvâm] dedi ki: "Bu gibi durumlarda cevabı bulmak ancak fikir, talep ve takip (tetebbu') ile olur; ancak, bu tür problemlerde olduğu gibi, biz, şeyi (bilinmeyeni) kendisiyle tespit edebileceğimiz bir yönteme sahip değiliz."[27]

Bu ifadeyi biraz daha açmak gerekirse, herhangi bir problem ile karşılaşıldığında üç eylem bizi doğru sonuca götürecektir. Bunlardan ilki, problemin "zorunlu", "mümkün" ve "imkânsız" kategorilerinden hangisine girdiği; *imkânsız* değilse ne tür bir problem olduğu ve türüne göre nasıl bir çözüm tekniği uygulamak gerektiği gibi konularda düşünmek; ikincisi, problem ile sorulan, istenen, talep edilen şeyin tam olarak ne olduğunu kavrayıp çözüm sürecini buna göre yönetmek ve üçüncüsü, başından sonuna kadar işlem sıra ve düzenine riayet etmektir.

Burada son olarak denklemin modern matematik yardımıyla çözümünü göstermek gerekirse, öncelikle denklemin, polinom denklemi formuna sokulması, yani bir tarafında polinom diğer tarafında da sıfır olacak şekilde düzenlenmesi gerekir.

$x^4+2x^3+6x^2+5x=66 \Rightarrow x^4+2x^3+6x^2+5x-66=0$

Denklemin sabit terimi 66'nin bölenleri arasından (2 ve -3) denklemi sağladığından $\{x_1=2$ ve $x_2=-3\}$ olur. Diğer kökleri bulmak için bu köklerden faydalanırsak:

$x^4+2x^3+6x^2+5x-66=(x-2).(x^3+4x^2+14x+33) \Rightarrow x-2=0$ veya

$x^3+4x^2+14x+33=0$ olur.

İlk denklemin ilk kök olduğu zaten biliniyor. İkincisinin sabit teriminin bölenlerinden sadece (-3) denklemi sağlar. Bu durumda:

$x^3+4x^2+14x+33= (x+3).(x^2+x+11) \Rightarrow x+3=0$ veya

$x^2+x+11=0$ olur.

İlk denklemin ikinci kök olduğu zaten biliniyor. İkinci denklemde ise:

$\Delta=b^2-4ac$' den $\Delta<0$ çıkar.

Bu durumda denklemin gerçek değil sadece karmaşık kökü vardır. Netice olarak:

$x^4+2x^3+6x^2+5x-66=(x-2).(x+3).(x^2+x+11) \Rightarrow$ ÇK= {2,-3}

27 *İrşâdu't-tullâb...*, 114a.

3.1.2. Makîs aleyh tek terim ise:

Denklemde değişken terimin üssü daha büyük olan taraf yani makîs aleyh tek terimliyse de aşağıdaki formül uygulanır.[28]

$$\forall\, b,c,d,e \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\; ve \;\; m,n,p,q \; ardışık\ pozitif\ tam\ sayılar\ olmak\ üzere \;\; \Rightarrow \; x^m = bx^n + cx^p + dx^q + e(x^0) \; denkleminde \; m > n > p > q \Rightarrow \;\; m-0 = m \; olduğundan \;\; x^m \le e \;\; \Rightarrow \;\; x \le \sqrt[m]{e}$$

Örnek:[29]

$$x^3 = 3x^2 + 16(x^0) \; denkleminde \;\; 3-0=3 \;\Rightarrow\; x^3 \le 16 \;\Rightarrow\; x \le \sqrt[3]{16} \;\Rightarrow\; x \cong 2$$

Müellifin verdiği bu son örnekte hata bulunmaktadır; zira çözüm kümesi, denklemi gerçeklememektedir. Ya denklemin/problemin kendisi hatalı veya eksik verilmiştir ya da çözüm yöntemi yanlıştır. İlk seçenek muhtemel görünmektedir; çünkü müellifin en başta ifade ettiği denklem değişkenlerinin üslerinin birer ardışık olması kuralı, x^2'li terimden sonra gelmesi gereken x 'li terim bulunmadığından ihlâl edilmiştir.

Denklem bugün bilinen yöntemlerle çözülürse:

$x^3=3x^2+16(x^0) \;\; \Rightarrow \;\; x^3-3x^2-16=0$' dır

Sabit terim olan 16'nın bölenlerinden sadece 4 denklemi sağladığından ve denklem (x-4)'e bölündüğünde:

$x^3-3x^2-16=(x-4).(x^2+x)+4x-16$ olduğundan

$x^3=3x^2+16(x^0)$ denkleminin gerçel ÇK={4} olur.

3.2. Denklem terimlerinde kesirli sayı bulunduğunda çözüm yöntemi

Müellif, hatimede oldukça muğlak bir ifade tarzı kullandığından, ayrıca ortaya koyduğu çözüm yöntemi her zaman netice veren sabit bir yöntem olmadığından, kesinlik içeren matematiksel dil ile söz konusu tekniği sunmak, birtakım zorlukları da beraberinde getirir. Bu zorlukların başında, müellifin hem denklemi verirken hem de çözerken koyduğu kurallara kendisinin uymaması ve çözümü sağlama yapmadan ve kontrol etmeden vermesi gelir. Bu sorunlar kendini, daha çok, kesirli

28 *İrşâdu't-tullâb*..., 112a-112b.
29 *İrşâdu't-tullâb*..., 114a.

ifade içeren denklemlerin çözüm yönteminde gösterir.[30] Çünkü müellif, yöntemini açıklayan bir örnek vermek yerine, karmaşık bir miras problemiyle, tekniğinin, cebir ilminin uygulama alanlarının en önemlilerinden feraiz ilmindeki kullanımını sunar. Bu sebeplerle burada konu ile ilgili çözüm formülü verilmeyecek, doğrudan miras problemi ve çözümüne geçilecektir. Problemin çözümü için öncelikle verilen bilgilerden cebirsel bir denklem oluşturulacak, ardından kesirli ifade içeren bu denklemin müellifin verdiği şekliyle çözümü ortaya konulacaktır.

Feraiz hesabı örneği[31]

Ölmüş adam, bir eş, üç oğlan ve bir kız geride bıraktı ve amca ve dayısının her biri için (birer pay) vasiyet etti denirse, amcanın vasiyeti/payı dayının vasiyetinin/payının iki katı ve ikisinin toplamı terekenin üç bölü beşinin bir bölü onudur. İkisinin (amca ve dayının payı) çarpımı karelerinin toplamından çıkarılıp kalanın üçte ikisinin küpü alınıp çıkana da iki artı beş bölü sekiz dirhem eklendiğinde, o eşin payının aynısı olur.

Fariza 1 eş, 3 oğul, 1 kız

Vasiyet 1 pay amca için ve 1 pay dayı için

Dayının vasiyeti = x

Amcanın vasiyeti = 2x

Tereke = y varsayılırsa, amca ve dayının payları toplamı terekenin beşte üçünün onda birinin onda biri olduğundan

$$2x + x = y.\frac{3}{5}.\frac{1}{10}.\frac{1}{10} \Rightarrow \; 3x = \frac{3y}{500} \Rightarrow \; y = 500x \; olur$$

Eşin payı:

$$\left[\frac{2\left((x^2+4x^2) - 2x^2\right)}{3}\right]^3 + 2 + \frac{5}{8}$$

$$= \boldsymbol{2x^6 + \frac{21}{8}} \, \textit{olduğundan miras hesabı denklemi}$$

$$64x^6 + 21 = 500x \;\; \textit{olur ve her iki taraf } 64\text{'}\textit{e bölünürse denklem}$$

$$x^6 + \frac{21}{64} = 7x + \frac{3x}{4} + \frac{x}{16} \; \textit{haline gelir.}$$

30 *İrşâdu't-tullâb*..., 114a-115a.

31 *İrşâdu't-tullâb*..., 115a-116a.

Müellifin yüksek dereceden kesirli denklem çözme kuralına göre en büyük paydanın en büyük üssün derecesinden kökü alınırsa $\{\sqrt[6]{64} = 2\}$ olur ve nispetin kökü (*dıl' el-nisbe*) olan 2 rakamı ile denklemin kesirli sayıları tam sayılara dönüştürüldüğünde:

$$x^6 + 21 = 250x \ \ olur. Üsler\ arasındaki\ fark\ \ 6 - 1 = 5 \ \Rightarrow \ x^5 \geq 250 \ \Rightarrow \ x \geq \sqrt[5]{250} \ \Rightarrow \boldsymbol{x \geq 3} \ \Rightarrow \ 3^6 + 21 = 250.3 \ \Rightarrow \ 729 + 21 = 750$$

Kesirli olan asıl denklem 2 olan nispetin kökü ile tam sayılı denkleme dönüştürüldüğünden bu denklemde iken asıl denklemde $\left\{\boldsymbol{x = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}}\right\}$ olmalıdır.

Sonuç ve Değerlendirme

İrşâdu't-tullâb ilâ ilmi'l-hisâb adlı matematik kitabının hatimesinde altı temel denklem formundan herhangi birine dönüştürülemeyen denklemler için verilen genel çözüm yönteminin matematiksel analizi neticesinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

1. Yöntem, denklemin taraflarının durumlarına ve sabit terimlerin tam veya kesirli sayı olmasına göre çeşitli versiyonlar sunmasına rağmen, her durumda doğru ve kesin netice vermemektedir.

2. Yöntem, tam ve kesin bir çözüm vermekten ziyade çözüm kümesi olabilecek tahmini sayıları sınırlamayı ve bu yolla çözüm sürecini kolaylaştırmayı hedeflemektedir.

3. Bazı örneklerde görülen hatalar, müellifin, denklemleri ve çözümlerini kontrol etmediğini ya da yöntem ve örnekleri başka bir eserden doğrulamadan naklettiğini akla getirmektedir.

4. Müellifin, bilhassa hatimede kullandığı muğlak ifade tarzı, zaten kesin ve sağlam matematiksel kanıtlarla desteklenmemiş yöntemin anlaşılmasını iyice zorlaştırmakta ve bizzat kendisinin de yönteminden çok emin olamadığını düşündürmektedir.

5. Örneklerden birinin feraiz hesabından verilmesi yöntemin nazarî merakın ötesine geçip günlük hayattaki problemlerin çözümlerini kolaylaştırmayı da hedeflediğini göstermektedir. Bu hedefin Osmanlı ilim geleneğindeki teorik bilimleri, bilhassa da matematik bilimleri uygulamalı bilimlere tatbik ederek kullanım alanlarını genişletme ve mümkün olan en fazla faydayı sağlama amacına uygun olduğu söylenebilir.

6. Eksik ve hatalarına rağmen yöntem, IX/XV. yüzyıl gibi erken bir dönemde yüksek dereceden denklemlerin çözümünde dikkate değer bir adım olarak görülebilir. Zira üçüncü ve dördüncü dereceden tüm denklemler için kesin sonuç veren genel bir yöntemin bulunması için iki asır daha geçmesi gerekecektir. Günümüzde de geçerliliğini korumasına rağmen bu yöntem, modern matematikçiler tarafından kullanışsızlığıyla anılmaktadır. Ne var ki alternatif bir yöntem de henüz bulunamamıştır. Beşinci ve daha yüksek dereceden denklemlere gelince, kesin sonuç veren genel bir yöntem bulunamayacağı ispatlanmıştır.

Kaynakça

Anbouba, Adel. "al-Samaw'al", *DSB*, XII, 91-95.

Dold-Samplonius, Yvonne, "al-Mahani", *DSB*, IX, 21.

Diophantos, *Sınâʿatu'l-cebr*, çev. Kosta b. Luka, thk. Rüşdî Râşid, Mısır, 1975.

Fazlıoğlu, İhsan, İhsan Fazlıoğlu, "Harranlı Matematikçilerin Matematiğin Oluşumundaki Katkıları", *Şafak Ural'a Armağan*, ed. Yücel Yüksel (İstanbul: Alfa Yayınları, 2012), 223-236.

——, "İbn el-Havvâm ve Eseri *el-Fevâ'id el-Behâ'iyye fi el-Kavâʿid el-Hisâbiyye* Tenkitli Metin ve Tarihi Değerlendirme, yüksek lisans tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, 1993.

——, "İrşâdu't-Tullâb ilâ İlmi'l-Hisâb [Hesap Biliminde Öğrencilere Kılavuz]", *Dîvân İlmi Araştırmalar*, 13 (2002/2): 315-340.

——, "İbn El-Havvâm, Eserleri ve *el-Fevâ'id el-Behâ'iyye fi el-Kavâʿid el-Hisâbiyye*'deki Çözümsüz Problemler Bahsi", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları Dergisi*, I (1995): 69-128.

——, "Semev'el Mağribî", *DİA*, XXXVI, 488-492.

Hayyâm, Ömer, "el-Makâle fi'l-cebr ve'l-mukâbele", *Resâ'ilü'l-Hayyâm el-cebriyye* içinde, thk. Rüşdî Râşid ve Ahmed Cebbâr, Halep, 1981.

İbnü'l-Hâim, *el-Mümtiʿ fî şerhi'l-Mukniʿ*, Süleymaniye Kütüphanesi, Şehid Ali Paşa 2706.

İbnü'l-Havvâm, *Fevâ'idü'l-Behâ'iyye fi'l-kavâʿidi'l-hisâbiyye*, Süleymaniye Kütüphanesi, Hasan Hüsnü Paşa 1292/8.

İrşâdu't-tullâb ilâ ilmi'l-hisâb, Topkapı Sarayı Kütüphanesi, III. Ahmed 3144.

Kerecî, "Kitâbü'l-Fahrî li'l-Kerecî", *Târîhu ilmi'l-cebr fi'l-âlemi'l-Arabî içinde, Ahmed Selim Saidan,* c. I, Kuveyt, 1985, 132-141, 145-170.

Mağribî, Semev'el, *el-Bâhir fi'l-cebr*, thk. Salah Ahmed ve Rüşdî Râşid, Dımeşk 1972.

Râşid, Rüşdî, *el-Cebr ve'l-hendese fi'l-karni's-sâni aşer: müellefât Şerefeddîn et-Tûsî*, Beyrut: Merkez Dirâsâtu'l-Vahdeti'l-Arabiyye, 1998.

——, "al-Karaji", *DSB*, VII, 240-246.

——, *Târîhu'r-riyâdiyyât el-Arabiyye beyne'l-cebr ve'l-hisâb*, Beyrut: Merkez Dirâsâtu'l-Vahdeti'l-Arabiyye, 2004.

——, *Mevsûʿâtu târîhi'l-ulûmi'l-Arabiyye*, c. II, Beyrut: Merkez Dirâsâtu'l-Vahdeti'l-Arabiyye, 1997.

Rosenfeld, B. A. ve A. T. Grigorian, "Thabit Ibn Qurra", *DSB*, XIII, 291.

Saidan, Ahmed Selim, *Târîhu ilmi'l-cebr fi'l-âlemi'l-Arabi*, Kuveyt, 1985.

الخاتمة: فيما سبق الوعد به[1]

فنقول أوّلاً من المعلوم في تركيب الأنواع: إنّ مقدار كل مفرد إذا ضرب[2] في ضلعه، خرج مقدار النوع المفرد الذي يليه بعده، وقسمته أيضا على الضلع، يخرج النوع الذي يليه قبله. فإذا في كل نوع مفرد من مفردات النوع الذي يليه قبله بقدر ما في الضلع الواحد من الآحاد، فإذا تحقّق ذلك، فانظر إلى العديلين، فأيّهما اشتمل على أعلى المراتب، فسمّه المقيس عليه والآخر المقيس. ثمّ خذ الفضل بين أس الأ أعلى من أحدهما وبين أس الأدنى من الآخر، واطلب أقل عدد من جنس الفضل، واضربه في عدد أعلى مراتب المقيس، وضم الحاصل إلى ما تجاور[3] من المراتب إن كان، وضرب الحاصل أيضا في ذلك العدد، وجمع الحاصل إلى ما تحاوره[4] من المراتب إن كان، وهكذا إلى[5] أن يصل إلى الأدنى. فإن تساوي المجتمع حاصل ذلك العدد أو زاد عليه، فالعدد الذي يلي ذلك العدد قبله هو نهاية أعداد التخمين. وكذا، إن تساويا وكان الأعلى غير مفرد وإلاّ فهو ذلك العدد بعينه.

فإن كان المقيس مفردا، فخذ فضل ما بين أسه وأس الأعلى وأطلب أقل من جنس الفضل يساوي عدد المفرد أو يزيد عليه، فما كان فالعدد الذي يليه بعده هو نهاية أعداد التخمين.

وإن كان المقيس عليه هو المفرد، أخذت الفضل بين أسه وأس الأعلى من المركب، وطلبت أعظم عدد من جنس الفضل يساوي عدد أعلى المركب أو ينقص عنه، فما كان فالذي يليه وما بعده في جهة الرفع هو المطلوب.

فإذا[6] انحصرت الأعداد، فاختبرها واحدا بعد واحد. وطريقه أن تضرب أحدها في عدد أعلى

١ ١١١و في النص.
٢ ١١١ظ في النص.
٣ تجاور: «تحاور» في الناص.
٤ تجاوره: «تحاوره» في الناص.
٥ ١١٢و في النص.
٦ ١١٢ظ في النص.

المراتب، فما حصل فهو نوع أنزل من الأعلى برتبة[٧]. فإن كان مع الأ أعلى جنس آخر من تلك الرتبة[٨]، فاجمع الخارج[٩] إليه وإلا فلا. ثم اضرب المجتمع أو ما صار إليه بالجمع في ذلك العدد أيضا، وافعل بالخارج[١٠] ما تقدّم وهكذا إلى أن يصير المبلغ جنس مساويا لأنزل المراتب الواقعة في أحد العديلين، واحفظ المجتمع. ثمّ اضرب عددا على مراتب العديل الآخر في ذلك العدد، واصنع فيه ما تقدّم الى الآخر، وانظر بين الحاصلين، فإن تساويا، فذلك العدد هو الجذر[١١] المركّب منه تلك الأنواع المفروضة وإلاّ[١٢] فهو أقل. إن زاد[١٣] حاصل المقيس عليه على حاصل المقيس، وإلاّ فهو أكثر. هذا كلّه بعد أن تقسم جميع ما معك أعلى عدد الأعلا. إن تعدّد، فيرجع إلى واحد والباقي على تلك النسبة كما مرّ.

فلو قيل: كعب وأربعة أموال تعدل عشرة أشياء و أحدا وثلاثين درهما، فالفضل بين الأسين ثلاثة. فاطلب أقل عدد، إذا كعب يساوي أو يزيد على حاصل العديل المقيس بعد تحويل جميع ما فيه إلى العدد، تجده ثلاثة وهي توافق عند الامتحان فهي الجذر.

ولو قيل؛ مال مال وكعبان وستة أموال وخمسة أشياء يعدل ستة[١٤] وستين درهما، فالفضل أربعة. فاطلب أقل عدد، إذا صُيِّر مال مال سُوًى حاصله ستة[١٥] وستين أو يزيد عليها، فتجده ثلاثة، فالإثنان هما المطلوب.

وهذه المسئلة بعينها ما وقعت للمولى المعظّم جمال الحق والدين عبد الله بن محمد الخوام البغدادي وصورتها:

أيّ مال إذا ضرب جذره وجذر جذره وثلاثة دراهم في جذريه وجذري جذره وأربعة

٧ برتبة: «برتبه» في النص.
٨ الرتبة: «الرتبه» في النص.
٩ الخارج: «الحارح» في النص.
١٠ بالخارج: «بالحارح» في النص.
١١ الجذر: «الجدر» في النص.
١٢ ١١٣و في النص.
١٣ زاد: «راد» في النص.
١٤ ستة: «سته» في النص.
١٥ ستة: «سته» في النص ؛ ١١٣ظ في النص.

دراهم، كان مائة وأربعة وأربعين. فرضناه مال مال فيكون جذره[١٦] مالا وجذر جذره شيئاً ويكون جذراه مالين وجذرا جذره شيئين. فتضرب جذره وجذر جذره وثلاثة دراهم في جذريه وجذري جذره وأربعة دراهم فيكون الحاصل مالي مال وأربعة كعاب واثني عشر مالا وعشرة[١٧] أشياء واثني عشر درهما وذلك[١٨] يعدل مائة وأربعة وأربعين درهما.

ثم قال: واستخراج الجواب في مثل هذه المواضع إنما يكون بالفكر والطلب والتتبّع. فإنّه ما لنا طريق يستخرج به الشيء في مثل هذه الصور. (انتهى)

ولو قيل؛ كعب يعدل ثلاثة[١٩] أموال وستة عشر درهما، فالفضل ثلاثة. فاطلب أعظم عدد، إذا كعب يساوي ثلاثة أو يزيد عليها، تجده إثنين وهما يوافقان فهما الجذر.

هذا كله إذا لم يكن في المعادلة كسور. فإن كان، فاعرف الفضل بين أسي أعلى المراتب وأنزلها، إن كانا عن العدد في جهة واحدة، وإلا فاجمعهما، يحصل البعد. ثم حل المخرج تلك الكسور إلى أضلاع[٢٠] أول أو غيرها بحيث تنقسم[٢١] على عدد البعد قسمة متساوية في العدة والعدد أو يزيد عليه بفرد من أفراد خارج القسمة أو أقل أو أكثر، وإلاّ فزد في أضلاعه ما يكمل به المطلوب وواحد من تلك الأقسام هو ضلع النسبة، فاعرف مخرجها وضلعها. ثمّ اقسم جميع ما معك على عدد الأ أعلى، ثمّ اطلب عددا كما تقدّم وكمل العمل إلى آخره، وانظر بين الحاصلين، فإن تساويا، فالعدد المأخوذ هو المطلوب وليس في أجناس المسئلة كسور، وإلاّ فالبسط الأنواع التي معك غير الأ أعلى بأن تأخذ البعد بين أس ذلك الجنس الذي تريد بسطه وأس الأعلا فما حصل، فكرِّرْ ضلع النسبة بقدره، وركِّبْ ذلك بالضرب[٢٢]، فما حصل فاضربه في العدد المطلوب بسطه. فإذا بسطت جميع الأنواع، طلبت نهاية أعداد التخمين كما تقدّم وامتحنت الأعداد المحصورة كما تقدم وقسمت ما وافق على ضلع النسبة، فيخرج الجذر، فتأملّ.

١٦ جذره: «حدره» في النص.

١٧ عشرة: «عشره» في النص.

١٨ ١١٤و في النص.

١٩ ثلاثة: «ثلاثه» في النص.

٢٠ أضلاع: «أصلاع» في النص.

٢١ ١١٤ظ في النص.

٢٢ ١١٥و في النص.

فإن قيل؛ ترك ميت[٢٣] زوجة وثلاثة بنين و بنتا وأوصى لكل واحد من عمّه وخاله بوصية[٢٤]، فكانت وصية[٢٥] العم ضعف وصيّة[٢٦] الخال ومجموعهما ثلاثة أخماس عشر عشر التركة[٢٧]. وإذا طرح مسطحهما من مجموع المربعيهما وكعب ثلثا الباقي وزيد على الخارج درهمان وخمسة أثمان، حصل ذلك مثل نصيب الزوجة. فافرض وصية[٢٨] الخال[٢٩] شيأ ووصية العم شيئين واعمل ما قال، تجد أربعة وستين كعب كعب[٣٠] وأحدا وعشرين درهما يعدلان خمسمائة شيء وبعد القسمة كعب كعب وأحدا وعشرين جزء من أربعة وستين من واحد يعدلان سبعة جذور[٣١] وثلاثة أرباع جذر[٣٢] ونصف ثمنه. فالبعد ستة[٣٣] والمخرج أربعة وستون وأضلاعه منقسمة على عدد البعد، فضلع النسبة إثنان وبعد البسط يرجع المعادلة إلى كعب كعب واحد وعشرين درهما يعدلان مائتين وخمسين شيأ، فالبعد بين الأشياء وكعب الكعب خمسة. فاطلب أقل عدد من جنسها يساوي المائتين والخمسين أو يزيد عليها وذلك أربعة فالثلاثة نهاية[٣٤] أعداد التخمين وهي توافق. فاقسمها على ضلع النسبة، يخرج واحد ونصف وهو[٣٥] الجذر[٣٦]. والله أعلم.

وليكن هذا آخر ما أردته وزُبَد هذا الفن فيما اختصرته ولخّصته[٣٧]. والحمد لله على كماله ونواله والصلاة على سيدنا محمد وآله وصحبه وسلم وحسبنا الله ونعم الوكيل. تمّت هذه الرسالة المباركة بعون الله وحسن توفيقه.

٢٣ ميت: في تحت السطر في النص.
٢٤ بوصية: «بوصيه» في النص.
٢٥ وصية: «وصيت» في النص.
٢٦ وصية: «وصيه» في النص.
٢٧ التركة: «التركه» في النص.
٢٨ وصية: «وصيه» في النص.
٢٩ الخال: «الحال» في النص.
٣٠ ١١٥ظ في النص.
٣١ جذور: «جدور» في النص.
٣٢ جذر: «جدر» في النص.
٣٣ ستة: «سته» في النص.
٣٤ نهاية: في هامش.
٣٥ ١١٦و في النص.
٣٦ الجذر: «الجدر» في النص.
٣٧ ولخّصته: «ولحصته» في النص.

Hatime: Daha Önce (Bahsedileceği) Vaad Edilen (Konu) Hakkındadır

Öncelikle türlerin terkibinde bulunan bilinen sayılardan bahsedelim; tekil (*mufred*) her bir türün değeri (*mikdâr*) ilk kökü (*dıl*) ile çarpıldığında kendinden sonra gelen tekil türün değeri çıkar. Aynı şekilde onu (tekil türün değerini) ilk köke böldüğünde kendinden önce gelen tür çıkar. (Denklemdeki) tekil türlerden her bir tekil türün (kök) dereceleri/birimleri bir kök derecesi/birimi değerince ardışık olduğunda [denklemdeki tüm değişkenlerin üsleri birer ardışık olduğunda] ve bu (durum denklemde) gerçekleştiğinde denklemin iki tarafına bak, hangi taraf mertebelerin en yükseğini içeriyorsa onu kıyas edilen (*makîs aleyh*), diğerini de kıyas eden (*makîs*) olarak isimlendir. Sonra birinin en büyük ve diğerinin en küçük üssü arasındaki fazlalığı (*fark*) al, fazlalığın cinsinden (olan) en küçük sayıyı iste ve onu makîsin derecesi en yüksek sayısı ile çarp ve sonucu (*hâsıl*) eğer varsa derecesi en yakın olana (*tecâvur*) kat. Hâsıl olan aynı şekilde o sayıyla çarpıldı ve hâsıl olan eğer varsa derecesi en yakın olan ile toplandı ve en düşüğe/küçüğe ulaşana kadar böyle devam edildi. Toplam, o sayının sonucuna eşit veya ondan büyük olursa, o sayının öncesinde gelen sayı tahmin edilen sayıların sonuncusudur. Eşit olurlar ve en yüksek (dereceli ifade) tekil değilse (çözüm) bunun gibidir, aksi takdirde o (tahmin edilen sayıların sonuncusu), o sayının (çözümün) kendisidir.

Eğer makîs tekil olursa, onun üssü ve (denklemdeki) en yüksek üssün arasındaki fazlalığı al ve tekil sayıya eşit veya ondan büyük olan fazlalığın cinsinden en küçük (sayıyı) iste, olan (şey) ondan sonra gelen sayıdır ki o tahmin edilen sayıların sonuncusudur.

Eğer makîs aleyh tekil olursa, onun üssü ve birleşik/mürekkeb ifadenin en büyüğünün üssü arasındaki farkı alırsın ve birleşik ifadenin en büyüğünün sayısına eşit veya ondan eksik olan farkın cinsinden en büyük sayıyı istersin, olan (şey) artma (yükselme) tarafında onu izleyen ve ondan sonra gelendir ki o istenendir.

(Çözüm kümesi olabilecek) Sayıları sınırladığında, onları birer birer dene. Bunun yöntemi, onlardan birini en yüksek derecenin sayısıyla çarpmandır, hâsıl olan en yüksekten bir derece (*rutbe*) aşağıda olan türdür. En yüksekle birlikte o dereceden başka bir cins olursa, çıkanı (*hâricî*) onunla topla, aksi takdirde toplama. Sonra toplamı veya toplamanın neticesini aynı şekilde o sayıyla çarp ve çıkanla (sonuçla) önceki (işlemleri) yap ve meblağ, denklemin taraflarının birinde vaki olan derecelerin en küçüğüne/düşüğüne eşit bir cins hâline gelene kadar bu şekilde devam et ve toplamı sakla. Sonra denklemin diğer tarafına bölüm hâlinde olan sayıyı o sayıyla çarp ve orada sonuna kadar daha önce yapılanları yap, iki sonuç arasına bak, eşit olurlarsa o sayı o varsayılan türlerin birleşik/mürekkep köküdür/cezridir, aksi takdirde o (sayı) daha küçüktür. Makîs aleyhin sonucu makîsin sonucu üzerine eklenirse, o zaman daha büyüktür. Bunların hepsi sendekilerin tamamını en yükseğin sayısına bölmenden sonradır. Eğer artarsa/çoğalırsa (*teaddüd*) bir'e/bütün olana müracaat edilir ve kalan, geçtiği gibi, o nispet üzeredir.

Eğer "küp (*ka'b*) artı dört tam kare (*emvâl*) eşittir on şey artı otuz bir dirhem" denseydi, iki üs arasındaki fazlalık üç olurdu. Oradakilerin (makîs tarafı) hepsini sayıya dönüştürdükten sonra küp, makîs tarafının sonucuna eşit veya daha büyük olduğunda en küçük sayıyı iste, o sayıyı üç bulursun, o sayı denemeye/sağlamaya uygundur ki o cezrdir/köktür (çözüm kümesidir).

Eğer "mal mal artı iki küp artı altı emvâl artı beş eşya eşittir altmış altı dirhem" denseydi, (üsler arasındaki) fark dört olurdu. Mâl mâl'ın sonucu altmış altıya eşit veya ondan fazla olduğunda en küçük sayıyı iste. O sayıyı üç bulursun ve iki de istenendir. Bu problem/denklem büyük insan, Cemâluddin Abdullah b. Muhammed el-Havvâm el-Bağdâdî'nin ortaya koyduğunun aynısıdır. O denklemin şekli (şöyledir):

Herhangi bir mâlın karekökü artı karekökünün karekökü artı üç dirhem, (o mâlın) iki karekökü artı iki karekökünün karekökü artı dört dirhem ile çarpıldığında, yüz kırk dört olur. Onu (mâlı) mâl mâl varsaydık, böylece karekökü mâl, karekökünün karekökü şey ve iki karekökü iki mâl, iki karekökünün karekökü de iki şey olur. Karekökü artı karekökünün karekökü artı üç dirhemi iki karekökü artı iki karekökünün karekökü artı dört dirhemle çarparsın, sonuç iki mâl mâl artı dört küp artı on iki mâl artı on şey artı on iki eşittir yüz kırk dört dirhem olur.

Sonra [İbnü'l-Havvâm] dedi ki:

Bu gibi konularda cevabı çıkarmak/bulmak ancak fikir, talep ve takip (tetebbu') ile olur; ancak, bu tür problemlerde olduğu gibi, biz, şeyi(bilinmeyeni) kendisiyle tespit edebileceğimiz bir yönteme sâhip değiliz.

Eğer "küp eşittir üç mal artı on altı dirhem" denseydi, (üsler arasındaki) fark üç olurdu. Küp üçe eşit veya ondan daha fazla olduğunda en büyük sayıyı iste. Onu iki bulursun ve iki uygundur ki, o cezrdir.

Bunların hepsi denklemde kesirler olmadığında (geçerlidir). Eğer (denklemde kesir) olursa, üs derecesi en yüksek ve en düşük olan sayı bakımından tek tarafta olursa, üsler arasındaki farkı öğren, aksi takdirde o ikisini topla, boyut (denklemin derecesi) meydana gelir. Sonra o kesirlerin paydasını (mahrecini) ilk köklerine veya onun dışındakine hal et (çevir), böylece boyut sayısına rakam ve sayı bakımından eşit bir bölümlemeyle bölünür veya ona, bölmenin sonucunun tekillerinden (efrâd) bir tekil kadar veya daha az veyahut daha çok eklenir, aksi takdirde istenenin kendisiyle tamamlandığı köklerine ekle. O kısımlardan biri nispetin köküdür. Onun (nispetin) paydasını ve kökünü öğren. Sonra sendekilerin hepsini (derecesi) en yükseğin sayısına böl, sonra da önceki gibi bir sayı iste ve işlemi sonuna kadar tamamla. İki sonucun arasına bak, eğer eşit olurlarsa alınan sayı istenendir ve denklemin cinslerinde kesir yoktur, aksi takdirde sendeki türleri, en yükseği hariç olmak üzere bast [tam sayılı kesri bileşik kesre çevirmek(tecnîs)] et. Bunu da bast etmek istediğin o cinsin üssü ve hâsıl olan en yüksek üs arasındaki boyutu/farkı alarak yaparsın. Mümkün olduğunca nispetin kökünü tekrarla ve onu çarpmayla yükselt, hâsıl olanı bastı istenen sayıyla çarp. Türlerin hepsini bast ettiğinde önceki gibi tahmin edilen sayıların sonuncusunu ister, önceki gibi sınırlanmış sayıları denersin ve nispetin köküne uygun olanı bölersin. Böylece cezr çıkar, (bunun hakkında) düşün.

Ölmüş adam bir eş, üç oğlan ve bir kız geride bıraktı ve amca ve dayısının her biri için (birer pay) vasiyet etti denirse, amcanın vasiyeti (payı) dayının vasiyetinin iki katı ve ikisinin toplamı terekenin üç bölü beşinin bir bölü onun bir bölü onudur. İkisinin (amca ve dayının payı) çarpımı karelerinin toplamından çıkarılıp kalanın üçte ikisinin küpü alınıp çıkana da iki artı beş bölü sekiz dirhem eklendiğinde, o eşin payının aynısı olur. Dayının vasiyetini şey, amcanın vasiyetini iki şey varsay ve söyleneni yap, altmış dört küp küp artı yirmi bir dirhem eşittir beş yüz şeyi bulursun. Bölmeden sonra (denklem) küp küp artı bir tam yirmi bir bölü altmış dört eşittir yedi cezr (şey) artı üç bölü dört şey artı bir bölü sekiz (cezrin) yarısı (olur). Boyut (üs derecesi) altı, payda altmış dört ve onun kökleri boyut sayısına bölünebilirdir (münkasim) ve böylece nispetin kökü iki (olur). Bast ettikten sonra denklem, "küp küp artı yirmi bir dirhem eşittir iki yüz elli şey"e döner. Şeyler ve küp küp arasındaki boyut beştir. Onun cinsinden iki yüz elliye eşit veya ondan büyük (iki yüz elliyi aşan) en küçük sayıyı iste ki o sayı dörttür. Üç de tahmin edilen sayıların sonudur ve uygundur. Onu (üçü) nispetin köküne böl, bir artı bir bölü iki çıkar ki o cezrdir. Allah daha iyi bilir.

Bu, (sunmayı) istediklerimin sonuncusu olsun. Bu fennin esasları ihtisar ve telhis ettiklerimdedir. Onun kemâline ve lütfuna şükürler olsun. Salât ve selâm efendimiz Muhammed'e, ailesine ve arkadaşlarınadır. Allah bize yeter, o ne güzel vekildir. Bu mübarek risâle Allah'ın yardımı ve güzel başarısıyla tamamlandı.